SOLUCIÓN DE ACTIVIDADES DE ELECTROSTÁTICA

■ CUESTIONES

C1. La ley de Coulomb $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{u}_r = k\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{u}$ explica la fuerza entre las cargas eléctricas q_1 y q_2 . Experimentalmente observamos que entre cargas del mismo signo es repulsiva y entre cargas de signo contrario es atractiva.

C2. De la ley de Coulomb se deduce que si las cargas se duplican la fuerza se hace cuatro veces mayor.

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{u}_r \; ; \quad \vec{F}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q_1.2q_2}{r^2}\vec{u}_r = 4\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{u}_r = 4\vec{F}$$

C3. Un punto donde exista un campo eléctrico, $\vec{E}$. se pondrá de manifiesto poniendo en el punto una carga eléctrica testigo, q', de forma que sí sobre ella aparecerá una fuerza, es que allí existe un campo eléctrico. El valor de la fuerza es $\vec{F} = \vec{E}.q'$.

Los factores de los que depende el campo eléctrico son el valor de la carga creadora, la constante dieléctrica del medio, la distancia de la carga al punto y el sentido del campo que depende del sentido de la carga.

C4. El potencial del campo eléctrico en un punto A, representa el trabajo que hace la fuerza del campo para llevar la unidad de carga positiva desde el punto dado A, al infinito, en el cual se asigna al campo, por convenio, el potencial cero. Para cargas puntuales este potencial se expresa con la ecuación $V_A = k\frac{q}{r}$. El potencial a diferencia del campo eléctrico es una magnitud escalar.

C5. Consideremos un punto de referencia al asignamos al potencial el valor V_o. El potencial de un punto *A* se ha definido como el trabajo de la fuerza del campo para trasladar a la unidad positiva de carga desde este punto hasta el de referencia. Su valor es V_A- V_O

Para otro punto B el potencial valdrá de igual modo V_B - V_O,

Si ahora calculamos la diferencia de potencial entre los puntos *A* y *B,* se tiene:

$$V_A - V_B = (V_A - V_O) - (V_B - V_O)$$

Observamos que desaparece en la resta el punto de referencia V_O. Aunque el valor del potencial en un punto depende del valor asignado al potencial del punto de referencia, en cambio la d.d.p., es independiente de su valor.

C6. Precisamente porque el campo eléctrico es conservativo, se define la energía potencial electrostática. Se determina mediante el trabajo para llevar a una carga testigo *q'* desde un punto *A* del campo eléctrico de otra carga *q,* desde *A* al infinito, donde para cargar puntuales le asignamos energía potencial cero.

C7. La energía de un sistema de cargas puntuales se determina mediante el trabajo necesario para alejar infinitamente todas las cargas del sistema y se puede calcular multiplicando el producto de cada carga, por el potencial que producen todas las demás en el lugar que cada una ocupa y dividiéndolo entre dos. Como las cargas y el potencial son magnitudes escalares que pueden tomar valores positivos o negativos, la energía potencial electrostática igualmente puede ser positiva o negativa.

C8. Las líneas del campo creado por una carga positiva son “salientes” y tienen el sentido de la carga hacia fuera. En el campo creado por una carga negativa las líneas de fuerza son “entrantes” lo que quiere decir que tienen el sentido que va desde fuera hacia la carga.

C9. El campo eléctrico en cada punto es perpendicular a la superficie equipotencial que pasa por este punto. El sentido del vector campo eléctrico va desde los potenciales mayores a los menores, se dice que se dirige hacia los potenciales decrecientes.

C10. En un campo eléctrico uniforme las líneas de campo son rectas paralelas entre sí y las superficies equipotenciales son planos perpendiculares a las líneas del campo eléctrico.

C11. No, el flujo a través de una superficie cerrada es cero si no ha carga neta en su interior. Sin embargo también puede haber un flujo nulo si entra el mismo flujo que sale y en ese caso hay un campo eléctrico entrante y otro saliente.

C12. Si a través de la superficie cerrada de Gauss, sale un flujo positivo es porque en su interior hay carga neta positiva.

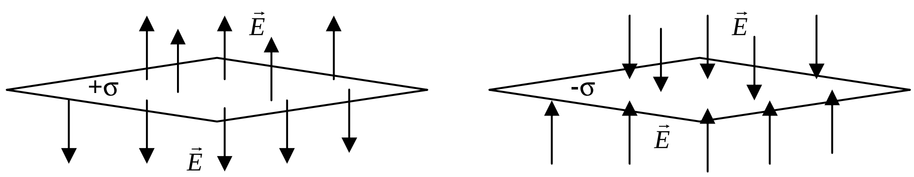
C13. El módulo del campo depende inversamente de la distancia al hilo, de la carga por unidad de longitud y de la permitividad dieléctrica del vacío,

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{\lambda_o}{2\pi\varepsilon_o r}$$

C14. Si se aplica la ley de Gauss se obtiene para el módulo del campo,

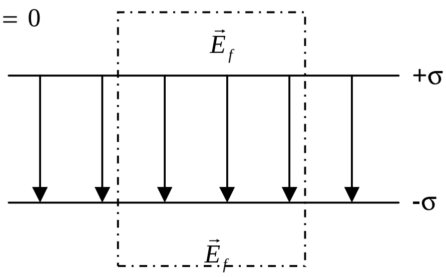
$$\left|\vec{E}\right| = \frac{\sigma_o}{2\varepsilon_o}$$

Que no depende de la distancia al plano. El campo es perpendicular al plano y saliente si la carga de la superficie del plano es positiva mientras será entrante si la carga es negativa.



C15. Por aplicación de la ley de Gauss a una superficie cerrada que contenga a los dos planos se verifica que el campo fuera de ellos es nulo. En efecto:

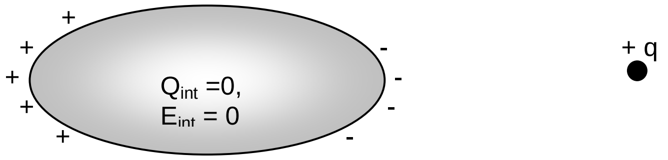
$$\vec{E}_f \cdot \vec{S} + \left(\vec{E}_f\right)\left(\vec{S}\right) = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_o} = \frac{\sigma S + \left(-\sigma\right) S}{\varepsilon_o} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_f = 0$$



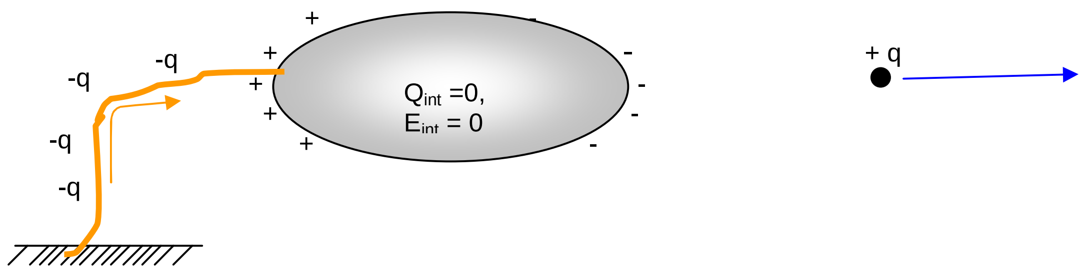
Para puntos situados entre ellos se demuestra en el texto que el campo va del plano cargado positivamente al que tiene carga negativa.
El valor del campo se determina también por aplicación de la ley de Gauss y vale:

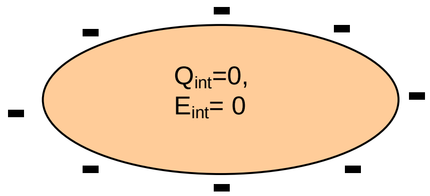
$$\left|\vec{E}\right| = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}$$

C16. En el interior del conductor no hay carga eléctrica y el campo eléctrico es nulo. Si hubiera un campo exterior induce cargas en el conductor pero la carga se reparte por la superficie del mismo de forma que apantalle el campo de las cargas que hay en el exterior. Por ejemplo, si frente a un conductor descargado se sitúa una carga puntual, habrá regiones de la superficie del conductor con una σ positiva y regiones con una σ negativa. Sin embargo si el conductor estaba descargado la carga neta total debe seguir siendo cero.



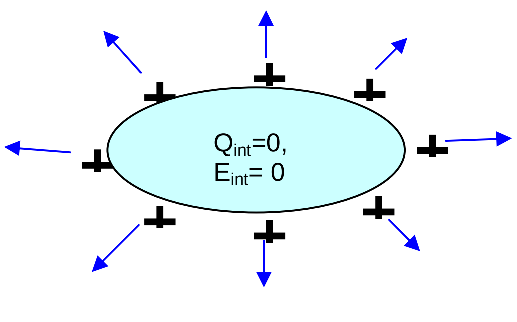
Si conectamos con tierra el conductor mediante un hilo metálico, la región cargada positivamente, recibe cargas negativas que vienen a neutralizarlas. Si después se quita la conexión con tierra y se aleja la carga inductora +q , en el conductor quedará únicamente carga negativa que se repartirá por la superficie del mismo.

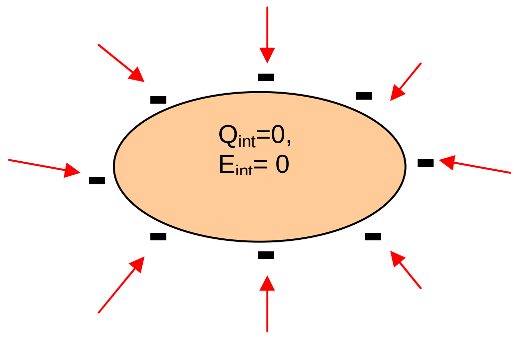




Se podría cargar el conductor con carga positiva si se sigue el mismo procedimiento usando una carga exterior negativa -q.

C17. El campo en el exterior de un conductor cargado y junto a su superficie es perpendicular a dicha superficie y su sentido es hacia el conductor si la carga de este es negativa mientras sale del conductor si este se ha cargado con carga positiva.





La intensidad del campo eléctrico en el exterior y junto a la superficie del conductor tiene su módulo proporcional a la densidad superficial de carga. Si el conductor está en el vacío como ε_0 es la permitividad de éste, resulta para el módulo.

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{\sigma_o}{\varepsilon_o}$$

■ EJERCICIOS

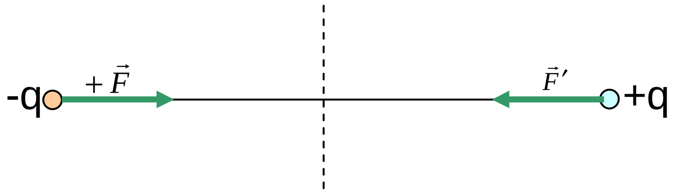
E1. Considerando que las cargas se encuentran en el vacío sobre el eje X, la ley de Coulomb

$$\vec{F} = k_0 \frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}_r = 9.10^9 \frac{\left(-1.10^{-9}\right)\cdot 210^{-9}}{1^2}\vec{i} = -18.10^{-9}\vec{i}\ N$$

Sobre la otra carga la fuerza será la pareja de reacción según la tercera ley de Newton.

$$\vec{F}' = 18.10^{-9}\,\vec{i}\ \ N$$

La fuerzas son de atracción y por tanto están en la dirección de la recta que une las cargas.



E2. Aplicando la ecuación del campo eléctrico:

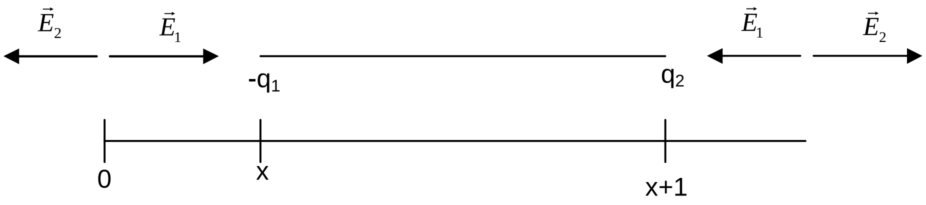
$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1'^2}\vec{u}_1' \approx 9\cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-5}}{3^2}(-\vec{i}\,) = -10^4\,\vec{i}\ N\cdot C^{-1} ,$$

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2'^2}\vec{u}_2' \approx 9\cdot 10^9 \cdot \frac{(-10^{-5})}{3^2}\,\vec{j} = -10^4\,\vec{j}\ N\cdot C^{-1} ,$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \approx -10^4\cdot(\vec{i} + \vec{j})\ N\cdot C^{-1}$$

E3. El punto en el cual se hace cero el campo resultante $\vec{E}$, es aquel en el cual se igualan los módulos de los campos $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ creados por las cargas q_1 y q_2 que tienen signo distinto. Primero hemos de saber en que región puede ser nulo el campo.

Debido al signo de las cargas, solamente a la izquierda de $-q_1$ y a la derecha de q_2 podría ser nulo el campo por ser los vectores de sentido contrario. Sin embargo al ser en valor absoluto la magnitud de la carga q_2 mayor que la carga q_1 el campo solo puede ser nulo a la izquierda de $-q_1$ en la posición de ese punto tomemos un origen de referencia *x=0* y asignemos a las cargas las posiciones de la figura.



En el punto en el que el campo es nulo deben ser iguales los módulos de los dos vectores:

$$k\frac{|q_1|}{x^2} = k\frac{q_2}{(x+1)^2}; \qquad (x+1)^2 = 2x^2; \qquad x^2 - 2x - 1 = 0\,; \qquad x = \begin{cases} 2,41 \\ -0,41 \end{cases}$$

Como según nuestro razonamiento x tiene que estar a la derecha de 0, solo es válida la posición positiva, de modo que la primera carga debe de estar del punto a potencial cero a una distancia *x = 2,41 m.*

E4. $V_1(0) = 9\cdot 10^9 \cdot \frac{(-3\cdot 10^{-9})}{0,5} = -54\ V$, $V_2(0) = 9\cdot 10^9 \cdot \frac{(+4\cdot 10^{-9})}{0,5} = 72\ V$,

$$V(0) = V_1(0) + V_2(0) = -54 + 72 = 18V ,$$

E5. En las ecuaciones que nos dan el módulo del campo eléctrico $E_A = k\frac{q}{r_A^2}$ y el potencial en el punto A, $V_A = k\frac{q}{r_A}$, Sustituimos los datos del problema.

$$\begin{cases} 200 = k\frac{q}{r_A^2} \\ 600 = k\frac{q}{r_A} \end{cases}$$

Dividiendo miembro a miembro las dos ecuaciones resulta:

$$\frac{200}{600} = \frac{kq/r_A^2}{kq/r_A} = \frac{1}{r_A}; \qquad \Rightarrow \qquad r_A = 3m$$

$$q = \frac{600V \cdot 3m}{9.10^9\, N\cdot m^2 \cdot C^{-2}} = 2.10^{-7}\, C$$

E6 Si l es la distancia que separa las cargas, tomando un origen en la primera carga, el punto a potencial cero estará situado a una distancia d de ella y a l-d de la otra.

$$V = 0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{d} + \frac{q_2}{(l-d)}\right), \quad \Rightarrow \quad d + (l-d)\frac{q_1}{q_2} = 0, \quad d = \frac{l}{3} \approx 0,333\ m$$

Como la energía potencial de una carga es $E_P = q\cdot V$ al ser en el punto el potencial nulo no la carga no podría tener energía potencial.

E7. a) Tomando un origen de distancias en la primera carga, el potencial resultante es nulo en un punto A que verifica:

$$V_A = k\left(\frac{8}{x_A} - \frac{2}{0,5 - x_A}\right).10^{-6} = 0, \quad 8(0,5 - X_A) = 2.\, X_A, \quad X_A = 2/5 = 0,4\ m.$$

El punto *B* donde se anula el campo está situado a la derecha de la segunda carga donde los campos eléctricos tienen sentidos contrarios. Igualando sus módulos:

$$k\frac{q_1}{x^2} = k\frac{|q_2|}{(x-0,5)^2}; \qquad 8(x-0,5)^2 = |-2|x^2 = 2x^2 \qquad x = \begin{cases} 1 \\ 0,33 \end{cases}$$

Como el campo tiene que estar situado a la derecha de $A=0,5\ m$ la solución compatible es $x_B = 1\ m$.

b) Para calcular el trabajo es necesario conocer los potenciales de los puntos A y B.

$$V_B = 9.10^9\,\frac{8.10^{-6}}{1} + 9.10^9\,\frac{-2.10^{-6}}{1-0.5} = 36.10^3\, V$$

$$W_{B\rightarrow A} = -q_o\left(V_A - V_B\right) = -0,1.10^{-9}\, C\cdot\left(0 - 36.10^3 V\right) = 3,6.10^{-6}\ J$$

E8. La energía de la carga C será

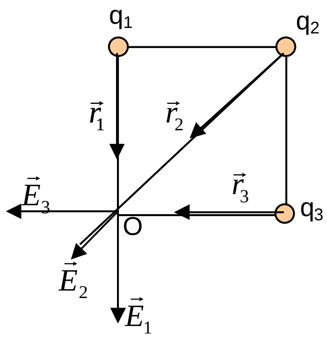
$$U_C = q_C \cdot (V_B(c) + V_A(c)) \approx 5\cdot 10^{-5}(9\cdot 10^9 \cdot \frac{3\cdot 10^{-5}}{1} + 9\cdot 10^9 \cdot \frac{2\cdot 10^{-5}}{1}) = 22{,}5 \;\; J \;,$$

Para calcular la energía del conjunto primero vemos las parejas diferentes que se pueden formar con el trío que evidentemente son: AB, AC, BC, por lo tanto

$$U_{A+B+C} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot(\frac{q_A q_B}{r_{AB}} + \frac{q_A q_C}{r_{AC}} + \frac{q_B q_C}{r_{BC}}) \approx 9\cdot 10^9 \cdot (\frac{2\cdot 3\cdot 10^{-10}}{1} + \frac{2\cdot 5\cdot 10^{-10}}{1} + \frac{3\cdot 5\cdot 10^{-10}}{1}) \approx 27.9 \; J \;.$$

Notar que la energía de la carga q_C no es igual que la energía del sistema de cargas.

E9. a) Los tres vectores campo eléctrico en el cuarto vértice son



$$\vec{E}_1 = k\frac{q}{r_1^2}\vec{u}_{r1} \qquad \vec{E}_2 = k\frac{q}{r_2^2}(\vec{u}_{r2}) \qquad \vec{E}_3 = k\frac{q}{r_3^2}\vec{u}_{r3}$$

$$\vec{u}_{r1} = -\vec{j} \qquad \vec{u}_{r2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} \qquad \vec{u}_{r3} = -\vec{i}$$

Por el principio de superposición el campo resultante en O.

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = kq(\frac{1}{r_1^2}\vec{u}_{r1} + \frac{1}{r_2^2}\vec{u}_{r2} + \frac{1}{r_3^2}\vec{u}_{r3}) =$$

$$= 9.10^9 \cdot 3.10^{-6}\left(\frac{1}{1^2}\left(-\vec{j}\right) + \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}\right) - \frac{1}{1^2}\vec{i}\right)$$

$$\vec{E} = 27.10^3\left(-\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\vec{i} - \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\vec{j}\right) = -36546\vec{i} - 36546\vec{j}\,\frac{N}{C}$$

b) Calculemos los potenciales en el mismo vértice y en el centro del cuadrado,

$$V_O = k\frac{q}{r_1} + k\frac{q}{r_2} + k\frac{q}{r_3} = 9.10^9 \cdot 3.10^{-6}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{1}\right) = 73092V$$

$$V_C = 3q\frac{k}{r} = 3\cdot 3.10^{-6}\,\frac{9.10^9}{\sqrt{2}/2} = 114.10^3 V \;.$$

El trabajo realizado por la fuerza del campo para llevar la carga $q_o = 5.10^{-6}$ *C* desde el vértice *O*, al centro del cuadrado *C* es,

$$W_{O\to C} = -q_o(V_C - V_O) = -5.10^{-6} C\cdot\left(114.10^3 - 73092\right)V = -0{,}2J$$

E10. **a)** El campo eléctrico depende de la distancia a la carga según la ecuación $\vec{E} = 4r\,\vec{u}_r$ es decir, su dirección es radial. Para determinar el potencial hemos de realizar una integración desde un punto *P* cualquiera, hasta el punto de referencia a potencial cero, que ahora está en el origen de coordenadas O.

Como el campo es ahora radial el vector $d\vec{l} = dr\,\vec{u}_r + d\vec{n}$ resulta únicamente $d\vec{l} = dr\,\vec{u}_r$

$$V_P = \int_{r_P}^{O} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{r_P}^{O} 4r\,\vec{u}_r \cdot dr\,\vec{u}_r = 4\int_{r_P}^{O} r\,dr = 4\left(\frac{r^2}{2}\right)_{r_P}^{O} = 2r_P^2$$

b) El trabajo realizado $W_{A\to B} = -q_o\left(V_B - V_A\right) = -20.10^{-9}\left(2\cdot 20^2 - 2\cdot 10^2\right) = -1,2.10^{-5}\ J$

E11 a) $\Phi = \vec{E}\cdot\vec{A} = \dfrac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = -\dfrac{3.10^{-8} C}{8,85.10^{-12} C^2 \cdot N^{-1} \cdot m^{-2}} = -3390\dfrac{N}{C}m^2$

b) La simetría del problema permite aplicar la ley de Gauss, para calcular el campo eléctrico.

$$\Phi = \vec{E}\cdot\vec{A} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}; \qquad \left|\vec{E}\right|\left|\vec{A}\right|\cos 180 = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

El vector superficie es hacia fuera, mientras que el vector campo por ser la carga negativa es entrante, de modo que forman 180º.

Despejando el valor del campo.

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{1}{(-1)\varepsilon_o}\frac{q_{\text{int}}}{4\pi R^2} = \frac{-3.10^{-8}\ C}{-8,85.10^{-12} C^2 N^{-1} m^{-2}\, 4\pi\, 3^2 m^2} = 30\frac{N}{C}$$

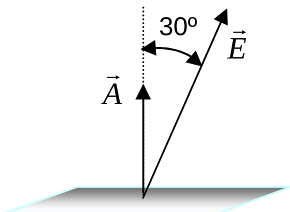
Este campo que está dirigido hacia la carga, que es negativa, y por lo tanto entrante en la esfera. Vectorialmente si $\vec{u}_r$ es un vector unitario en la dirección radial y saliente , resulta para el campo eléctrico.

$$\vec{E} = -30\,\vec{u}_r\,\frac{N}{C}$$

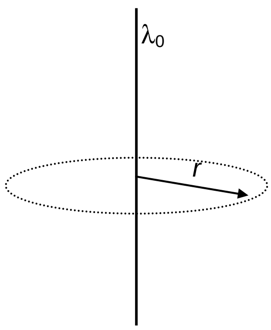
E12 El flujo del campo es por definición

$\Phi_E = \vec{E}\cdot\vec{A} = E\cdot A\cdot\cos 30 = 3\cdot 2^2 \cos 30 =$

$= 10,4\ \ N\cdot m^2\cdot C^{-1}$



E13.



El campo debido a una distribución lineal de carga de longitud indefinida $\vec{E} = \dfrac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0\, r}\,\vec{u}_r$,

$$\vec{E} = \frac{2\cdot 10^{-9}}{2\pi\cdot 8,85.10^{-12}\cdot 5}\vec{u}_r = 7,2\ \vec{u}_r\ \ N\cdot C^{-1},$$

$$\vec{F} = q\vec{E} = -5.10^{-9} C\cdot 7,2\frac{N}{c}\vec{u}_r = -3,6.10^{-8}\ \vec{u}_r\ N\ ,$$

E14. $$E=\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}=\frac{2\cdot 10^{-6}}{2\cdot 8,85.10^{-12}}\frac{N}{C}=113.10^3\frac{N}{C}$$

$$V=-\frac{\sigma_o}{2\varepsilon_o}h=-\frac{2.10^{-6}}{2\cdot 8,85.10^{-12}}\frac{N}{C}\cdot 2m=-226.10^3\,V$$

E15. a) $V_A-V_B=\left|\vec{E}\right|h=113.10^3\frac{N}{C}\left(2m-6m\right)=-452.10^3\,V$

b) Tomando como energía potencial cero cuando la carga está sobre el plano (z=0)

$$E_{P,A}=q_o\cdot V_A=-3.10^{-9}\,C\cdot\left(-\frac{2.10^{-6}}{2\cdot 8,85.10^{-12}}\cdot 2\right)=\ 6,8.10^4\ J$$

$$E_{P,B}=q_o\cdot V_B=-3.10^{-9}\,C\cdot\left(-\frac{2.10^{-6}}{2\cdot 8,85.10^{-12}}\cdot 6\right)=\ 2.10^3\ J$$

c) El trabajo del campo eléctrico

$$W_{A\to B}=-(E_{PB}-E_{PA})=-\left(2.10^{-3}-6,8.10^{-4}\right)J=-1,32.10^{-3}\,J$$

El valor negativo del trabajo indica que hay que realizarlo desde fuera sobre el campo.

E16. $W_{\infty\to R}=-q_p(V_{\sup}-0)=1,6\cdot 10^{-19}C\cdot 10^4V=1.6\cdot 10^{-15}\,J$

E17. Debido a la simétrica esférica de la esfera demostramos en el texto que podríamos considerar idealmente toda la carga concentrada en el centro para calcular el potencial y el campo eléctrico en su superficie.

$$V_{cond}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{R}=9\cdot 10^9\cdot\frac{(-10^{-6})}{0,1}=-9\cdot 10^4\quad V\,,$$

$$\left|\vec{E}_{\sup}\right|=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{|q|}{R^2}\approx 9\cdot 10^9\cdot\frac{\left|-10^{-6}\right|}{0,1^2}=9\cdot 10^5\quad V\cdot m^{-1}$$

E18. $W_{R\to\infty}=-q_o\cdot(0-V_{cond})=-10^{-9}C\left(0-9.10^4\right)V=9.10^{-5}\,J$

E19 La carga de la esfera es: $q=\sigma\cdot A=\sigma\cdot\pi R^2=\frac{10^{-11}C}{10^{-4}m^2}\pi\left(10^{-2}m\right)^2=\ 3,14.10^{-11}C$

$$V=9.10^9\,\frac{N\cdot m^2}{C^2}\frac{3,14.10^{-11}C}{0,1m}=2,8V$$

E20. **a)** La densidad cúbica de carga es $\rho=\frac{q}{V};\quad \frac{4}{3}\pi R^3=\frac{5,655.10^{-13}C}{5.10^{-15}C/m^3}=113,1m^3$

$$R=\sqrt[3]{\frac{3\cdot 113,1m^3}{4\pi}}=3m$$

b) Aplicando la ley de Gauss hemos deducido que el campo dentro de una distribución esférica de carga distribuida de modo uniforme vale:

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{\rho}{3\varepsilon_o} r = \frac{5.10^{-15} C}{3 \cdot 8,85.10^{-12} C^2 N^{-1} m^{-2}} 0,20m = 3,8.10^{-5} \frac{N}{C}$$

c) La diferencia de potencial es la circulación del campo de un punto al otro.

$$V_A - V_B = \int_{A=0,2m}^{B=3m} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{0,2}^{3} \frac{\rho}{3\varepsilon_o} r\, \vec{u}_r \cdot dr\vec{u}_r = \frac{\rho}{3\varepsilon_o} \int_{0,2}^{3} r\, dr$$

$$V_A - V_B = \frac{\rho}{3\varepsilon_o} \left[\frac{r^2}{2}\right]_{0,2}^{3} = \frac{5.10^{-15} C \cdot m^{-3}}{3 \cdot 8,85.10^{-12} C^2 N^{-1} m^{-2}} \left[\frac{3^2 m^2}{2} - \frac{0,2^2 m^2}{2}\right] = 8,4.10^{-4} V$$

E21. Por ser la esfera conductora el campo en su interior es nulo es decir para valores de *r* tales que *r* < *R*, siendo *R* su radio. Además por ser conductora es una superficie equipotencial de modo que el potencial en todos sus puntos interiores vale igual que en la superficie.

Debido a su simetría esférica podemos suponer mentalmente que toda su carga está concentrada en su centro y aplicar las ecuaciones de las cargas puntuales.

a) Para *r= 0,1 m* $\left|\vec{E}\right| = 0$; $V = k\frac{q}{R} = 9.10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2} \frac{10.10^{-6} C}{0,3m} = 3.10^5 V$

b) $\left|\vec{E}\right| = 9.10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \frac{10.10^{-6} C}{1^2 m^2} = 9.10^4 \frac{N}{C}$; $\qquad V = 9.10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \frac{10.10^{-6} C}{1\ m} = 9.10^4 V$

E22. a) El campo eléctrico entre dos planos paralelos es uniforme y vale lo mismo en todos los puntos.

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} = \frac{2.10^{-9} C/m^2}{8,85.10^{-12} C^2 N^{-1} m^{-2}} = 226 \frac{N}{C}$$

b) La diferencia de potencial por ser el campo uniforme es igual al módulo del campo por la distancia. Tomamos el origen de referencia en el plano cargado negativamente.

$$V_A - V_B = \left|\vec{E}\right| r_A - \left|\vec{E}\right| r_B = \left|\vec{E}\right| (r_A - r_B) = 226 \frac{N}{C} \left(25m - [50m - 30m]\right) = 1130 V$$

c) $W_{A \to B} = -q_o (V_B - V_A) = -1,6.10^{-19} C \cdot (-1130 V) = 1,8.10^{-16} J$

El signo positivo del trabajo indica que lo hace el campo espontáneamente.

PROBLEMAS

P1. Consideremos que cuando el electrón entra en el campo eléctrico, instante que asignamos como *t=0* en verifica:

$$\begin{cases} x_o = 0; & v_{ox} = v_O \\ y_o = 0; & v_{oy} = 0 \end{cases}$$

a) La fuerza que actúa sobre el electrón es $F_y = -e\,E_o = m\cdot a_y$

b) Las ecuaciones del movimiento:

$$a_y = \frac{-eE_o}{m_e}; \qquad a_x = 0\,,$$

De donde deducimos que según el eje Y el movimiento es uniformemente acelerado, mientras que según el eje X el movimiento es uniforme. Las ecuaciones del movimiento serán:

$$y = -\frac{1}{2}\frac{eE_o}{m_e}t^2; \qquad x = v_o\,t$$

c) Eliminando el tiempo entre las dos anteriores resulta.

$$y = -\frac{1}{2}\frac{eE_o}{m_e}\left(\frac{x}{v_o}\right)^2 = -\frac{1}{2}\frac{eE_o}{m_e v_o^2}x^2$$

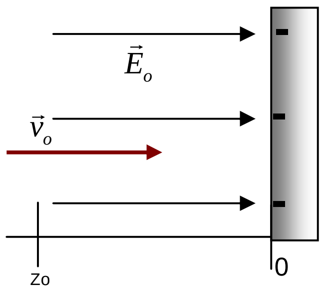
Que es la ecuación de una parábola.

P2 Para una distribución de carga uniforme $-\sigma_o$ el campo $\vec{E}_o$ será perpendicular a la pared y dirigido hacia ella, de módulo:

$$\left|\vec{E}_0\right| = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\,,$$

El potencial eléctrico, tomando como referencia la pared, para medir las distancias y asignándole potencial cero, será en un punto situado a una distancia z_o: $V = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\, z_o$

La pared repele al electrón, luego habrá que lanzar el electrón con una velocidad v_o tal, que no llegue a frenarse y dar la vuelta antes de que toque la pared. La mínima velocidad de lanzamiento será aquella que permita al electrón llegar a la pared con velocidad nula.



Aplicando la ecuación de la energía.

$$W_E = -e\left(V_{zo} - V\right) = 0 - \frac{1}{2}m_e v_0^2;$$

$$-e\left(\frac{\sigma_o}{2\varepsilon_o}z_o - 0\right) = -\frac{1}{2}m_e v_o^2$$

$$v_o = \sqrt{\frac{e\sigma_o z_o}{\varepsilon_o m_e}}$$

P3 a) $V_o = 9\cdot 10^9\cdot(\frac{2\cdot 10^{-9}}{2} + \frac{(-4\cdot 10^{-9})}{2}) = -9\ V,$

$$\vec{E} = 9\cdot 10^9\cdot(\frac{2\cdot 10^{-9}}{2^2}(-\vec{j}) + \frac{(-4\cdot 10^{-9})}{2^2}\vec{j}) = -4{,}5\ \vec{j}\ N\cdot C^{-1}$$

b) $V_{(2,0)} = 9 \cdot 10^9 \cdot (\frac{2 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{2^2+2^2}} + \frac{(-4 \cdot 10^{-9})}{\sqrt{2^2+2^2}}) = -\frac{18}{\sqrt{8}} \ V$

$$\vec{E} = 9.10^9 \cdot \left(\frac{2.10^{-9}}{\left(\sqrt{8}\right)^2} \left[\frac{2}{\sqrt{8}} (\vec{i} - \vec{j}) \right] + \frac{(-4.10^{-9})}{\left(\sqrt{8}\right)^2} \left[\frac{2}{\sqrt{8}} (\vec{i} + \vec{j}) \right] \right) = -\frac{9}{2\sqrt{8}} \ (\vec{i} + 3\vec{j}) \ NC^{-1},$$

c) $\vec{F} = q \cdot \vec{E} = -6 \cdot 10^{-12} \left[\frac{-9}{2\sqrt{8}} \ (\vec{i} + 3\vec{j}) \ N\, C^{-1} \right] = \frac{27}{\sqrt{8}} 10^{-12} \ (\vec{i} + 3\vec{j}) \ N$

d) $W_{(2,0) \to (0,0)} = -q_o \cdot (V_{(0,0)} - \Psi_{(2,0)}) = -\left(-6.10^{-12} C\right) \left[-9V - \left(\frac{-18}{\sqrt{8}} V \right) \right] = -1,6.10^{-11} J$

P4 a) $E_{P,O} = \frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(-1,6 \cdot 10^{-19})^2}{0,53 \cdot 10^{-10}} = 4, \cdot 10^{-18} J$,

b) Aplicando conservación de la energía, y por simetría ambos adquirirán la misma energía cinética:

$$\frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0} = \frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0 2r_0} + 2 \cdot \frac{1}{2} m_e v_e^2 ,$$

$$v_e = \sqrt{\frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0 2r_0 m_e}} = \sqrt{\frac{\left(1,6.10^{-19}\right)^2}{8\pi \cdot 8,85.10^{-12} \cdot 0,53.10^{-10} \cdot 9,1.10^{-31}}} = 1,5.10^6 \frac{m}{s} ,$$

c) Las energías cinéticas de cada electrón en la posición anterior son iguales y valen:

$$\frac{1}{2} m_e v_e^2 = \frac{1}{2} 9,1.10^{-31} kg \cdot \left(1,55.10^6\right)^2 \frac{m^2}{s^2} = 1,1.10^{-18} J ,$$

$$E_P(2r_0) = \frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0 2r_0} = \frac{\left(1,6.10^{-19} C\right)^2}{4\pi \cdot 8,85.10^{-12} C^2 N^{-1} m^{-2} \ 2 \cdot 0,53.10^{-10} m} = 2,17.10^{-18} J$$

P5 a) El electrón está sometido a una aceleración $a_e = \frac{|q_e| E_0}{m_e}$, y el protón en sentido contrario a otra aceleración: $a_p = \frac{|q_e| E_0}{m_p}$, La relación entre las aceleraciones es: $a_e = a_p \frac{m_p}{m_e}$

Las dos cargas tienen aceleración constante y por lo tanto movimiento uniformemente acelerado y si es d_o la distancia que las separa inicialmente, en el instante en el que se cruzan en la que el electrón habrá recorrido d_e y el protón d_o-d_e .

El instante t en que se produce el cruce , será: $t_c = \sqrt{\frac{2d_e}{a_e}} = \sqrt{\frac{2(d_0 - d_e)}{a_p}}$

Elevando al cuadrado podemos despejar el valor de d_e

$$2d_e\left(\frac{a_e}{a_p}+1\right)=2d_0\,\frac{a_e}{a_p}\ , \qquad \Rightarrow$$

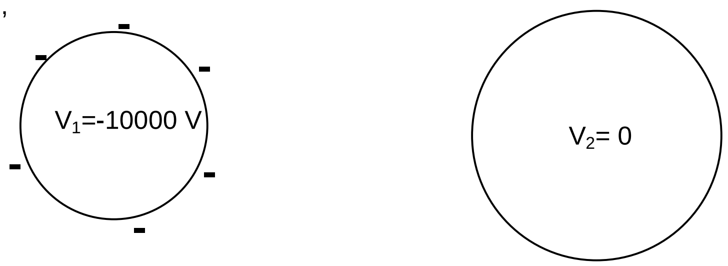
$$d_e=d_0\,\frac{\dfrac{a_e}{a_p}}{\left(\dfrac{a_e}{a_p}+1\right)}=\frac{m_p}{m_p+m_e}\,d_o=\frac{1,67\cdot 10^{-27}}{1,67\cdot 10^{-27}+9,1\cdot 10^{-31}}\,d_0\approx 3,9987\ m,$$ es decir la distancia a la lámina positiva es de *4-3,9987= 0,0013 m*.

b) $t_c=\dfrac{v_e}{a_e}=\dfrac{v_p}{a_p}\,,\quad\Rightarrow\quad \dfrac{v_e}{v_p}=\dfrac{a_e}{a_p}=\dfrac{m_p}{m_e}\approx 1836$

c) $E_{p,proton}=q_p\cdot 0=0\,J$, por llegar a la lámina negativa donde se ha tomado el potencial nulo.

$$E_{p,electron}=-1,6.10^{-19}C\cdot 1600V=-2.56\cdot 10^{-16}\,J\ ,$$

P6 a)



El conductor 1**,** suponiendo toda su carga concentrada idealmente en el centro vale:

$$q_1=V_1\cdot 4\pi\varepsilon_o R_1=-10\,000\cdot 4\pi\cdot 8,85.10^{-12}\cdot 0,1=-1,1.10^{-7}\,C$$

q_2= 0

b) Cundo se alcance el equilibrio el electrostático habrá habido un paso de carga de un conductor al otro hasta que se igualen los potenciales. Además se debe tener en cuenta el principio de conservación de la carga eléctrica lo que permite escribir el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} k\dfrac{q_1^*}{R_1}=k\dfrac{q_2^*}{R_2}; \qquad q_1^*+q_2^*=-1,1.10^{-7}C\end{cases}$$

$$q_1^*=-0,44.10^{-7}\,C;\qquad q_2^*=-0,67.10^{-7}\,C$$

El potencial de equilibrio. $V^*=9.10^9\,\dfrac{-0,44.10^{-7}}{0,1}=-4003V$

c) La carga que ha circulado por el hilo es $q_2^*=-0,67.10^{-7}\,C$

d) Aplicaremos el principio de conservación de la energía, considerando que la energía de un conductor cargado es $\dfrac{1}{2}qV$. La energía que tiene el conductor 1 antes de situar el hilo que lo pone en contacto con el conductor 2, se queda en parte en el mismo, más otra parte que pasa por el hilo y llega hasta el conductor 2 y otra que se emite en forma de ondas electromágnéticas por moverse las cargas eléctricas por el hilo con aceleración, designemos esta energía total que va por el hilo como W. Del balance de la conservación de la energía resulta:

$$\frac{1}{2}q_1V_1 = \frac{1}{2}q_1^*V^* + W; \Rightarrow \quad W = \frac{1}{2}\left(-1{,}1.10^{-7}C\right)\cdot\left(-10000V\right) - \frac{1}{2}\left(-4{,}4.10^{-8}C\right)\left(-4003\right)$$

$$W = 5{,}5.10^{-4}\,J - 0{,}88.10^{-4}\,J = 4{,}6.10^{-4}\,J$$