SOLUCIÓN ACTIVIDADES T4 ONDAS

CUESTIONES

C1. En la cuerda de una guitarra se generan ondas transversales, que se propagan con velocidad $v=\sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$ donde T es la tensión de la cuerda y μ su densidad lineal.

Las ondas sonoras son ondas longitudinales, y se propagan mediante variaciones de presión con una velocidad, $v=\sqrt{\dfrac{\gamma RT}{M}}$, en la que γ es el coeficiente adiabático del gas, R es la constante molar de los gases, T es su temperatura en Kelvin y M la masa molar. Para el caso del aire, esta velocidad del sonido vale aproximadamente $v=20\sqrt{T}$

C2. Por un gas se pueden propagar ondas longitudinales que son a la vez ondas de presión y de desplazamiento. La presión del gas en cada punto varía con el tiempo, y estas variaciones se transmiten de una partícula a otra a través del espacio. Cada partícula sufre a la vez pequeños desplazamientos alternativos en su posición, por tanto se trata también de ondas de desplazamiento de las partículas materiales del gas en la dirección en que se propaga la onda.

C3. La velocidad de propagación de una onda solo depende de propiedades del medio en el que se propaga, de modo que al doblar el periodo no sufre ninguna modificación. Tampoco la pulsación $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$

La velocidad se puede expresar como el cociente de la pulsación y el número de onda, v = ω / k. Si la velocidad se hace doble se duplica el cociente entre la pulsación ω y el número de ondas k.

$$v'=2v=\frac{2\omega}{k}=\frac{\omega}{k/2}=\frac{\omega}{k'}$$

De donde deducimos que el número de onda se recude a la mitad $k'=k/2$.

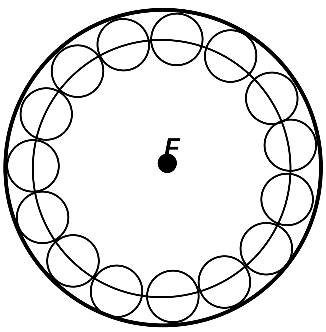
C4. Cuando dos partículas x_1 y x_2 están separadas en el espacio por un número entero de longitudes de onda $x_2-x_1=n\lambda$ en el mismo instante t, entonces se encuentran con el mismo valor de la perturbación:

$$\Psi(x_1,\ t)=\Psi(x_2,\ t)=\Psi(x_1+n\lambda,\ t)$$

Si para una partícula en un punto *x,* analizamos su estado de perturbación en un instante *t* y en otro instante $t'=t+nT$, tal que están separados por un número entero de veces el valor del periodo *T,* entonces la partícula se encuentra en el mismo estado vibratorio.

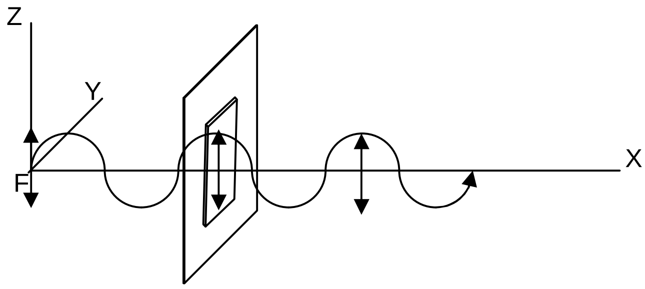
$$\Psi(x,t)=\Psi(x,t+nT)$$

C5. Aplicando el principio de Huygens se construye el nuevo frente de ondas.



C6. Se produce la reflexión de la onda en la pared del casco del buque, sin embargo en el borde de la proa que es afilado, se produce la difracción de la onda y está se propaga por aplicación del principio de Huygens como si bordeara el obstáculo. Si la chalupa está algo alejada del costado del buque puede entrar en oscilación por acción de las olas secundarias.

C7. La onda polarizada en el plano XY, tiene su plano de vibración en el plano XZ. Si la rendija está orientada paralelamente al eje Z, entonces si pasará por la rendija sin que nada de su energía sea absorbida y pierda intensidad.



C8. La onda estacionaria se produce cuando se encuentran dos ondas iguales propagándose en sentidos contrarios en la cuerda. Con un solo foco emisor la onda directa y la reflejada en el extremo se superponen para dar la onda estacionaria. Pero en una cuerda de longitud indefinida no hay posibilidad de que se forme la onda reflejada y por lo tanto tampoco ondas estacionarias.

C9. Suponiendo que no hay absorción por el medio, toda la potencia que sale del foco emisor P_o se propaga por el medio, sin embargo la intensidad es la potencia a través de cada unidad de superficie perpendicular a la dirección de propagación de la onda, de modo que por una esfera de radio R la intensidad será:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi R^2}$$

C10. Con independencia de la potencia del emisor como las ondas sonoras son mecánicas y necesitan un soporte material para su propagación, no pueden propagarse en el vacío.

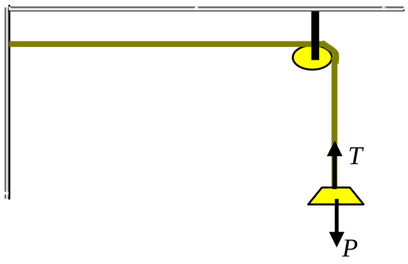
C11. La sensación sonora vale:

$$S(dB) = 10 \log \frac{I}{I_o} = 10 \log \frac{1000\, I_o}{I_o} = 30\, dB$$

No recibirá sensación sonora porque la máxima frecuencia audible para el oído humano es $20\ kHz$.
En efecto, para encontrar la sonoridad para la frecuencia de $22\ kHz$, hay que consultar el audiograma. Seguiremos la curva de sonoridad *30 dB (fonios)* hasta que encontremos la ordenada de *22 kHz* y vemos que ya se encuentra fuera de la posibilidad de audición del oído humano.

■ Ejercicios

E1 Como la cuerda no se desplaza con aceleración por tener un extremo fijo, la tensión de la misma es igual al peso de la masa suspendida, $T = 4\ kg \cdot 9{,}8\ m/s^2 = 39{,}2\ N$



La masa de la unidad de longitud vale $\mu = \frac{m}{l} = \frac{0{,}12\,kg}{12\,m} = 0{,}01\frac{kg}{m}$

La velocidad de propagación de la onda transversal por la cuerda es:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{39{,}2\ N}{0{,}01\,kg\,/\,m}} = 62{,}6\,m\,/\,s$$

E2 La velocidad de una onda longitudinal en el aire que es un gas diatómico, viene dada por la ecuación:

$$v = \sqrt{\frac{1{,}4\,R\,T}{M}} = \sqrt{\frac{1{,}4 \cdot\ 8{,}31\ J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}\ \cdot\ 273\,K}{29.10^{-3}\ kg \cdot mol^{-1}}} \approx 331\ \frac{m}{s}$$

E3 La longitud de onda está relacionada con la velocidad y la frecuencia por la ecuación $\lambda = \frac{v}{f}$

Para el agua la longitud de onda resulta: $\lambda = \frac{1500\,m\,/\,s}{250\,/\,s} = 6\ m$

Para el metal: $\lambda = \frac{5000\,m\,/\,s}{250\,/\,s} = 20\,m$

E4 La frecuencia es: $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\,s} = 2\,Hz$;

La frecuencia angular: $\omega = 2\,\pi\ f = 4\,\pi\,\frac{rad}{s}$

La longitud de onda: $\lambda = v \cdot\ T = 5\frac{m}{s} \cdot 2\,s = 10\ \ m$;

El número de onda: $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\,\pi}{10\,m} = 0{,}2\,\pi\ \cdot m^{-1}$

$\Psi_1 = 0{,}1\,sen\,2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{x}{10}\right)$; $\Psi_2 = 0{,}1\,sen\left(4\,\pi\,t - 0{,}2\,\pi\,x\right)$

$$\Psi_3 = 0{,}1\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{x}{10}\right) - \frac{\pi}{2}\right];$$

$$\Psi_4 = 0{,}1\cos\left(4\pi t - 0{,}2\,\pi\,x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Phi_1 = 0{,}1\,sen\,2\pi\left(\frac{x}{10} - \frac{t}{2}\right); \qquad \Phi_2 = 0{,}1\,sen\left(0{,}2\pi\,x - 4\pi\,t\right)$$

E5 La ecuación es: $\Psi = 0{,}20\cos[\pi/2(3t - 4x)]$

Comparando con la ecuación general $\Psi = A\cos\left(\omega t - k\,x\right)$

La amplitud es $A = 0{,}20m$; La frecuencia angular $\omega = \frac{3\pi}{2}\frac{rad}{s}$;

La frecuencia $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3\pi/2}{2\pi} = \frac{3}{4}Hz$

El número de onda $k = \frac{4\pi}{2} = 2\pi\,m^{-1}$; La longitud de onda $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2\pi\,m^{-1}} = 1\,m$

La velocidad de propagación $v = \lambda\cdot f = 1\,m\cdot\frac{3}{4}Hz = \frac{3}{4} = 0{,}75\frac{m}{s}$

Para hallar la elongación de la partícula vibrante situada en el foco en el instante $t = 0$, sustituimos estas dos condiciones en la ecuación de la onda.

$\Psi(0{,}0) = 0{,}20\cos[\pi/2\,(3t - 4x)] = 0{,}20\cos\pi/2\,(0 - 0) = 0{,}20\ m$

E6. a) $\Psi_1 = A\cos\left(\omega t - kx\right)$; $\Psi_2 = A\,sen\left(\omega t - kx\right)$

Como: $\Psi_1 = A\cos\left(\omega t - kx\right) = A\,sen\left(\frac{\pi}{2} - \left(\omega t - kx\right)\right)$

Comparando con Ψ_2 la diferencia de fase vale:

$$\theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi}{2} - \left(\omega t - kx\right) - \left(\omega t - kx\right) = \frac{\pi}{2}rad$$

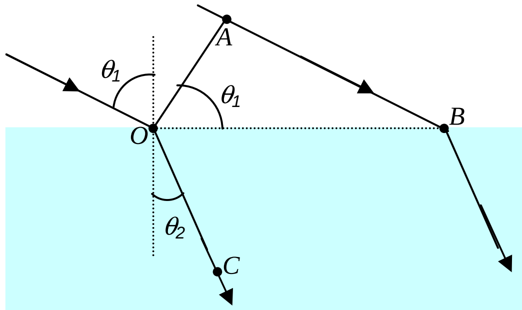
b) $\Psi_1 = A\cos\left(\omega t + kx\right)$; $\Psi_2 = -A\cos\left(\omega t + kx\right)$

Pero $\Psi_2 = -A\cos\left(\omega t + kx\right) = A\cos\left(\omega t + kx + \pi\right)$

Comparando con Ψ_1 la diferencia de fase vale:

$$\theta_2 - \theta_1 = \left(\omega t + kx + \pi\right) - \left(\omega t + kx\right) = \pi\,rad$$

E7 La representación de la marcha de los rayos es la siguiente:



a) Calculamos la distancia $\overline{AB}$ en el triángulo rectángulo $\triangle OAB$.

$\overline{AB} = \overline{OA}\cdot tg\,\theta_1 = 400\,m\cdot tg\,60º \approx 693\,m$

El tiempo $t_1 = \dfrac{\overline{AB}}{v_1} = \dfrac{693\ m}{400\ m/s} = 1{,}73\ s$

b) El ángulo que forma el haz de ondas refractado con la normal es θ_2 . Aplicando la ley de la refracción resulta:

$sen\,\theta_2 = \dfrac{v_2}{v_1}\, sen\,\theta_1 = \dfrac{300}{400}\, sen\, 60^o = 0{,}649$; $\theta_2 = arc\ sen\ 0{,}649 =$ $40{,}5^o$

c) La distancia recorrida es la distancia

$\overline{OC} = v_2 \cdot t_1 = 300\, \dfrac{m}{s} \cdot 1{,}73\ s = 519\ m$

E8 El ángulo límite se calcula: $sen\,\theta_L = \dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{1000}{1414} = 0{,}707$; $\theta_L = arc\ sen$ $0{,}707 = 45^o$

E9 La intensidad en la potencia por unidad de área situada normal a la dirección de propagación.

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{102W}{4\pi \left(10^4\right)^2 m^2} \approx 8{,}1.10^{-8}\ \frac{W}{m^2}$$

E10 Escribiendo las sensaciones sonoras en función de las intensidades:

$$S_1 = 10\ l\,o\,g\ \frac{I_1}{I_o} \quad ; \qquad S_2 = 10\,log\,\frac{I_2}{I_o}$$

$$10^{S_1} = \left(\frac{I_1}{I_o}\right)^{10} \quad ; \qquad 10^{S_2} = \left(\frac{I_2}{I_o}\right)^{10}$$

Dividiendo miembro a miembro:

$$\frac{10^{S_1}}{10^{S_2}} = \left(\frac{I_1}{I_2}\right)^{10} \quad ; \quad \frac{I_1}{I_2} = 10^{\left(\frac{S_1 - S_2}{10}\right)} = 10^{\left(\frac{120-40}{10}\right)} = 10^8$$

La relación buscada es: $\dfrac{I_1}{I_2} = 10^8$

■ Problemas

P1. **a)** De la ecuación $\Psi = 4\ sen\ \pi t$ se deduce, que si el foco está en x_F el tiempo que tarda la onda en llegar a un punto x, situado a la derecha del foco es: $t_1 = \dfrac{x - x_F}{v} = \dfrac{x - x_F}{20}$

De modo que cuando la partícula del foco lleve vibrando un tiempo t, la partícula en x, solo lleva un tiempo $(t - t_1)$. La ecuación de la onda será:

$$\Psi = 4\, sen\, \pi\left(t - t_1 \right) = 4\, sen\, \pi \left(t - \frac{x - x_F}{20} \right) .$$

Si el foco está en el origen $x_F = 0$ resulta: $\Psi = 4\, sen\, \pi \left(t - \frac{x}{20} \right)$

Para la onda que viaja a la izquierda resulta $t_2 = \frac{x - x_F}{-v} = -\frac{x - x_F}{20}$

La ecuación de la onda será $\Psi' = 4\, sen\, \pi \left(t - \frac{-(x - x_F)}{20} \right) = 4\, sen\, \pi \left(t + \frac{x - x_F}{20} \right)$

Para $x_F = 0$; $\Psi' = 4\, sen\, \pi \left(t + \frac{x}{20} \right)$

b) Si el punto está en $x = +24\ m$, resulta de sustituir:

$$\Psi(24, t) = 4\, sen\, \pi \left(t - \frac{24}{20} \right) = 4\, sen\, \pi (t - 1{,}2)$$

c) Si el punto está en $x = -24\ m$, resulta de sustituir:

$$\Psi'(-24, t) = 4\, sen\, \pi \left(t + \frac{-24}{20} \right) = 4\, sen\, \pi (t - 1{,}2)$$

Con toda lógica, dos puntos que estén a igual distancia del foco de la perturbación, aunque se encuentren a la derecha y a la izquierda del foco, deben tener igual estado vibratorio pues la onda viaja a la misma velocidad (en módulo) en ambos sentidos.

P2. a) El movimiento ondulatorio tiene de ecuación $\Psi = 4.10^{-2}\, sen\, 2\pi \left(\frac{x}{2} + \frac{t}{0{,}1} \right)$ la onda se desplaza hacia la izquierda del eje X.

b) Comparamos con la ecuación general de una onda que se desplaza de derecha a izquierda: $\Psi = A\, sen\ 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T} \right)$

La amplitud es $A = 4.10^{-2}\ m$.

El periodo $T = 0{,}1 s$. La frecuencia $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}1\, s} = 10\ Hz$.

La longitud de onda $\lambda = 2\ m$.

El número de onda $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{2\, m} = \pi\ m^{-1}$.

La velocidad de propagación $v = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\, m}{0{,}1\, s} = 20\ \frac{m}{s}$

c) Hallamos primero la ecuación del m.a.s. del punto situado en $x = +10\ m$:

$$\Psi(10,t)=4.10^{-2}\,sen\,2\pi\left(\frac{10}{2}+\frac{t}{0,1}\right)=4.10^{-2}\,sen\,2\pi(10t+5)$$

Después se particulariza para el instante $t\,=\,2s$ para conocer en este instante su estado vibratorio:

$$\Psi(10,2)=4.10^{-2}\ sen\,2\pi(10\cdot 2+5)\,rad=0$$

P3. La distancia entre dos máximos consecutivos corresponde con la distancia entre dos puntos del medio que vibran en concordancia de fase, por lo tanto su distancia espacial es una longitud de onda y la temporal un periodo. Resulta del enunciado:

λ = *1 m.*

El periodo es $T=\frac{\lambda}{v}=\frac{1\,m}{10\,m/s}=0,1\,s$

La ecuación de la onda es:

$$\Psi=A\,sen\,2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)=A\,sen\,2\pi\left(\frac{t}{0,1}-\frac{x}{1}\right)=A\,sen\,2\pi(10t-x)$$

Sustituyendo: Ψ *= 0,04 m,* cuando *t = 2,24 s,* para *x = 14 m;* resulta:

$0,04\,m=A\,sen\,2\pi(10\cdot 2,24-14)=A\cdot 0,588$; de donde

$$A=\frac{0,04\,m}{0,588}=0,068\,m=6,8.10^{-2}\ m$$

b) Escribimos la ecuación de la onda, ahora que sabemos su amplitud $\Psi=6,8.10^{-2}\ sen\,2\pi(10t-x)$

La velocidad de vibración de un punto se obtiene de derivar la ecuación de la onda

$$v=\frac{d\Psi}{dt}=6,8.10^{-2}\ 20\,\pi\cos 2\pi(10t-x)=4,28\cos 2\pi(10t-x)$$

Particularizando para *x = 5 m* en el instante *t = 4 s,* resulta para la velocidad de vibración.

$$v(5,4)=4,28\cos 2\pi(10t-x)=4,28\cos 2\pi(10\cdot 4-5)=4,28\,m/s$$

c) La diferencia de fase en el mismo instante, entre dos puntos separados una distancia:

$x_2 - x_1$ *= 2 m* viene determinada por:

$$\Delta\theta=(x_2-x_1)\frac{2\pi}{\lambda}=2\,m\frac{2\pi}{1m}=4\,\pi\,rad$$

P4. a) Comparando $\Psi(x,t)=0,04\,sen(t-x/4)$ con la ecuación general de la onda $\Psi=A\,sen\,(\omega t-k\,x)$

observamos que la amplitud vale: *A = 0,04 m ;* ω *= 1rad/s ;* *k = 0,25 m*$^{-1}$ *;* de donde:

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}Hz\ ;\quad v=\lambda\cdot f=\frac{2\pi}{k}\cdot f=\frac{2\pi}{0,25\,m^{-1}}\frac{1}{2\pi\,s}=4\frac{m}{s}\ ;$$

$$\lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi}{0,25\,m^{-1}}=8\,\pi\,m$$

b) Expresamos la diferencia de fase en radianes:

$$\Delta\theta = 60^{o} = 60\,\frac{\pi}{180}\,rad = \frac{\pi}{3}\,rad$$

$$\frac{\pi}{3} = \left(x_2 - x_1\right)\frac{2\pi}{8\pi\,m} = 0{,}25\,m^{-1}\left(x_2 - x_1\right);$$

$$x_2 - x_1 = \frac{\pi}{3 \cdot 0{,}25\,m^{-1}} \approx 4{,}19\,m$$

P5. a) La ecuación de la onda estacionaria que se ha explicado en el texto, es la producida por reflexión en un extremo fijo, a saber $\Psi_E = -2A\ sen\,k\,x\ cos\,\omega t$, comparando con la ecuación propuesta, $\Psi = 0{,}02\,sen 2\pi x\,cos\,60\pi t$

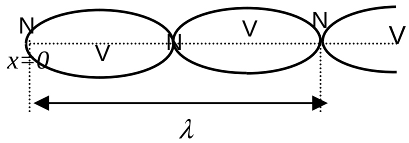
$\omega = 60\,\pi\,\frac{rad}{s}$; $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{60\,\pi}{2\,\pi}\,\frac{1}{s} = 30\,Hz$; $k = 2\pi\,m^{-1}$;

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2\pi}\,m = 1\,m$$

$$v = \lambda \cdot f = 1\,m \cdot \frac{30}{s} = 30\,\frac{m}{s}$$

b) La amplitud de la onda estacionaria es $A' = \left|-2A\,sen\,kx\right| = 0{,}02\,sen\,2\pi x$. El vientre está situado en un punto que vibra con la máxima amplitud, está corresponde cuando el seno vale la unidad y es $A'_V = 0{,}02\ m$.

Tomando en un nodo el origen de referencia el primer vientre está en $x_V = \frac{\lambda}{4} = \frac{1}{4} = 0{,}25\,m$



c) $A = 0{,}02\,sen\,2\pi\,\frac{x}{0{,}4} = 0{,}02\,sen\,2\pi\,\frac{0{,}15}{0{,}4} = 0{,}014\,m$

d)

$$\frac{d\Psi_E}{dt} = -0{,}02 \cdot 60\pi\,sen\,2\pi x\,sen\,60\pi t = -1{,}2\pi\,sen\,2\pi x\,sen\,60\pi t$$

Como en el vientre $sen\ 2\pi\ x = 1$ resulta:

$$\frac{d\Psi_E}{dt} = -1{,}2\pi\ sen\,60\pi t$$

La función $sen\ 60\pi t$ toma a su vez como valor máximo la unidad de modo que la velocidad máxima de un punto situado en un vientre será:

$$v_V = \left|-1{,}2\,\pi\right|\frac{m}{s} = 3{,}77\,\frac{m}{s}$$

P6. a) La distancia entre dos nodos vecinos es $\lambda/2$, $\lambda/2 = 11{,}5\,cm$; $\lambda = 23\,cm = 0{,}23\,m$

$v=\lambda\cdot\ f=0{,}23\,m\cdot\frac{62}{s}=14{,}26\,\frac{m}{s}$

b) Calculemos: $\omega=2\,\pi\ f=2\,\pi\cdot 62=124\,\pi\,\frac{rad}{s}$;

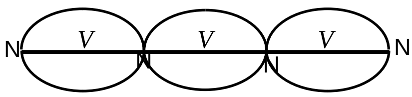
$k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi}{0{,}23\,m}=8{,}7\,\pi\,m^{-1}$

Como los dos extremos son fijos la ecuación de la onda estacionaria es de la forma:

$$\Psi_E=-2\,A\ \ sen\ \ k\,x\ \ cos\,\omega t=-2{,}5.10^{-2}\ sen\,8{,}7\,\pi\,x\ \ cos\,124\,\pi\,t$$

Recuérdese que la A que figura en la ecuación, es la amplitud de la onda progresiva. La de la onda estacionaria en un vientre, es el doble es decir $2\,A$. .

c) Como la distancia entre nodos vecinos es $11{,}5\ cm$, el número de segmentos que separan los nodos será, $n=\frac{3{,}45\,m}{0{,}115\,m}=30$. El número de nodos será uno más, es decir $N_N = 31$; sin embargo el número de vientres será el mismo que el de segmentos vibrantes $N_V = 30$.



P7. a) Comparando la ecuación dada $\Psi=0{,}06\,sen\left(2x-\pi t-\frac{\pi}{6}\right)$ con la general $\Psi=A\,sen\left(k\,x-\omega t+\theta_o\right)$; observamos:

$A = 0{,}06\ m$; $k = 2{,}0\ m^{-1}$; $\omega=\pi\frac{rad}{s}$; $\lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi}{2{,}0\,m^{-1}}=\pi\,m$;

$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{\pi}{2\pi}\approx 0{,}5\,Hz$

La fase inicial es $\theta_o=\frac{\pi}{6}\,rad$

b) La velocidad de vibración es: $v=\frac{d\Psi}{dt}=0{,}06\,(-\pi)\,cos\left(2{,}0x-\pi\,t+\frac{\pi}{6}\right)$

El valor máximo lo toma cuando el coseno valga la unidad,

resultando: $v_m=\left|0{,}06\ \cdot(-\pi)\right|\approx 0{,}19\,\frac{m}{s}$

c) La aceleración de las partículas al efectuar el m.a.s. es:

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2\Psi}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left[-0{,}06\pi\,cos\left(2{,}0x-\pi t+\frac{\pi}{6}\right)\right]=0{,}06\pi\cdot(-\pi)\,sen\left(2{,}0x-\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$$

La aceleración es máxima cuando el seno vale la unidad.

$$a_{max}=\left|-0{,}06\pi^2\right|=0{,}59\,\frac{m}{s^2}$$