SOLUCIÓN ACTIVIDADES T3, MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

CUESTIONES

C1. Las dos formas de expresar el m.a.s. son:

$x = A\ sen\ (\omega t + \theta_o)$; $x = A \cos\ (\omega t + \theta_o)$

Sí para $t=0$ es $x=0$; las ecuaciones correspondientes: $x = A\ sen\ \omega t$; $x = A \cos\ (\omega t + \pi / 2)$

C2. De las ecuación para la velocidad $v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$. En valor absoluto la velocidad es máxima cuando la elongación es nula, x = 0, y vale:

$$v_{max} = \pm\, \omega \cdot A$$

Para la aceleración, $a = -\omega^2 x$. Su valor es máximo cuando $x = \pm A$, y alcanza el valor absoluto,

$$|a_{max}| = \omega^2 A$$

C3. La ecuación del m.a.s. es $x = 2\cos\left(3\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$

a) La amplitud es $A = 2$ cm/s, corresponde con el máximo valor del coseno que es *1.*

La frecuencia angular: $\omega = 3\pi$ rad/s

La frecuencia: $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3\pi}{2\pi} s^{-1} = 1{,}5\,Hz$

La fase inicial: $\theta_o = -\pi / 2$ rad

La fase es la función del tiempo: $\theta(t) = 3\pi t - \pi/2$, con t en segundos y $\theta(t)$ en radianes.

b) Obtenemos la velocidad v(t) y la aceleración a(t), mediante las derivadas

$$v(t) = \dot{x}(t) = -6\pi\ sen\ (3\pi t - \pi/2); \qquad a(t) = \dot{v}(t) = -18\pi^2 \cos(3\pi t - \pi/2)$$

C4 La velocidad máxima es cuando $sen\ 4\ t$, toma su máximo valor que es la unidad. Es decir la velocidad máxima vale: $v = 4$ m/s.

La fase inicial es nula, $\theta_o = 0$

La frecuencia angular es $\omega = 4$ rad/s

El periodo $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4\,rad/s} = 1{,}57\,s$

C5 La fuerza elástica verifica la ley de Hooke $F = k\,x$. En este caso la fuerza deformadora es el peso del cuerpo suspendido $P = m \cdot g$ que ha producido un alargamiento x_1 , de modo que la constante elástica del muelle es:

$$k = \frac{F}{x_1} = \frac{P}{x_1} = \frac{mg}{x_1}$$

Si se suspende una masa $m/2$, la longitud del muelle será: $l = l_o + \dfrac{\frac{m}{2}g}{\frac{m}{x}g} = l_o + \dfrac{x_1}{2}$

C6. El periodo de oscilación verifica: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_o}{k}}$

Al colgar la masa $2m_o$ el nuevo periodo es: $T' = 2\pi\sqrt{\dfrac{2m_o}{k}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_o}{k}}\sqrt{2} = T\sqrt{2}$

C7 Su energía potencial elástica vale: $U_E = \dfrac{1}{2}kx^2 = \dfrac{1}{2}k\left[A sen\left(\omega t + \theta_o\right)\right]^2 = \dfrac{1}{2}kA^2 sen^2\left(\omega t + \theta_o\right)$

Las dos expresiones, tanto la que depende de x, como la que depende del tiempo t, demuestran que la energía potencial elástica no es constante.

C8 La energía potencial elástica depende del cuadrado de la elongación x, de modo que será máxima tanto en $x = +A$, como en $x = -A$. Su valor es:

$$U_E = \frac{1}{2}k\left(\pm A\right)^2$$

Sin embargo su valor mínimo es en $x=0$ y es nula.

C9 La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial elásticas:

$$E_m = \frac{1}{2}k\,x^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - x^2\right) = \frac{1}{2}m\,A^2$$

Como es independiente de x y de t resulta constante.

C10. Cuando la energía cinética es la cuarta parte de la energía potencial elástica.

$$E_c = \frac{E_p}{4};\qquad \frac{1}{2}k\left(A^2 - x^2\right) = \frac{\frac{1}{2}kx^2}{4} = \frac{kx^2}{8};\qquad \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kx^2\left(\frac{1}{4} + 1\right) = \frac{1}{2}kx^2\,\frac{5}{4}$$

$$x = \frac{2A}{\sqrt{5}}$$

C11 Al comprimirlo, cuando $t = 0$, se encuentra en $x = -A_o$; la fase inicial es $\theta_o = -\dfrac{\pi}{2}$

Como $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, resulta: $x = A_o sen\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t - \dfrac{\pi}{2}\right)$

C12 Antes de oscilar la tensión de la cuerda es igual al peso de la masa suspendida por estar en equilibrio estático, $P = m \cdot g$.

C13 Del principio de conservación de la energía mecánica, como la fuerza gravitatoria es conservativa la energía mecánica del péndulo es constante. Tomando un nivel de referencia $h = 0$, para la energía potencial gravitatoria en la posición vertical de equilibrio se verifica:

$$(E_P + E_C)_{arriba} = (E_P + E_C)_{abajo}$$

Sustituyendo las condiciones: $mgh_o = \dfrac{1}{2}mv^2$; $\Rightarrow$ $v = \sqrt{2\,g\,h_o}$

Sobre la masa oscilante actúan la tensión del hilo y el peso. La fuerza neta hacia dentro proporciona la fuera centrípeta que modifica la dirección de su vector velocidad y en la posición vertical la tensión T y el peso P, son de la misma dirección pero de sentido contrario.

$$F_C = m\frac{v^2}{L} = T - P = T - mg\ ; \quad T = m\frac{v^2}{L} + mg = m\frac{2gh_o}{L} + mg = mg\left(\frac{2h_o}{L} + 1\right)$$

C14 El periodo de un péndulo simple de longitud l_o vale: $T_o = 2\pi\sqrt{\frac{l_o}{g_o}}$

El periodo de un péndulo simple de longitud $l_1 = 4\,l_o$ vale: $T_1 = 2\pi\sqrt{4\frac{l_o}{g_o}} = 2\cdot 2\pi\sqrt{\frac{l_o}{g_o}} = 2\cdot T_o$

El periodo de un péndulo simple de longitud $l_o/4$ vale: $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_o/4}{g_o}} = \frac{1}{2}2\pi\sqrt{\frac{l_o}{g_o}} = \frac{T_o}{2}$

■ Ejercicios

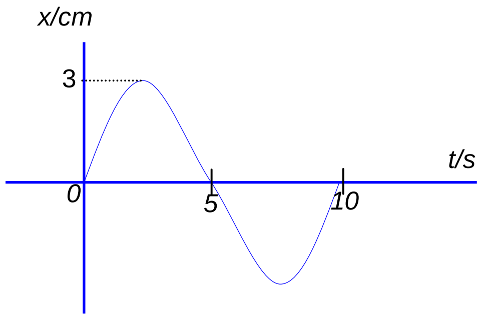
E1 a) La amplitud $A = 3\ cm = 0{,}03\ m\ ;$

El periodo $T = 10\ s$

La pulsación angular $\omega = 2\pi/T = 2\pi/10 = 0{,}2\pi\ \ rad\ /\ s$

La fase inicial es $\theta_o = -\frac{\pi}{2}\,rad$

La elongación $x = 0{,}03\cos\left(0{,}2\pi\, t - \pi/2\right)$



b) $x = 0{,}03\ sen\ 0{,}2\pi t$

E2 La ecuación general del m.a.s. es $x = A\,sen\left(\omega t + \theta_o\right)$

Para que $sen\left(\omega\cdot 0 + \theta_o\right) = -1$; $\theta_o = -\pi/2$

La ecuación buscada es $x = 0{,}05\ sen\left(0{,}1\,\pi\, t - \frac{\pi}{2}\right)$

E3 $a = -\omega^2\ x$; debemos determinar ω ; $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}1} = 20\pi\,\frac{rad}{s}$; $x = -\frac{-20}{(20\pi)^2} = 5{,}1.10^{-3}\ m$

E4 $F' = k\,(l - l_o)$; Al comprimirlo la fuerza ejercida la consideraremos negativa, de modo que

$$-40\ N = k\left(0{,}23m - 0{,}25\,m\right)\ ; \quad k = \frac{-40\ N}{-0{,}02\,m} = 2000\,\frac{N}{m}$$

La longitud que alcanza el muelle $l = l_o + \frac{F}{k} = 0{,}25m + \frac{10kg\ \cdot\ 9{,}8\,m\,/\,s^2}{2000\ N\,/\,m} = 0{,}74\,m$

E5 Nos dan la frecuencia $f = 4$ *oscilaciones/s* . El periodo es $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{4} = 0{,}25\,s$

Como $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$; resulta: $k = \frac{4\pi^2\ m}{T^2} = \frac{4\pi^2\ 0{,}050}{0{,}25^2} = 31{,}6\ \frac{N}{m}$

$$a = -\omega^2\, x = -\left(\frac{2\pi}{0{,}25}\right)^2 x = -631{,}7\, x$$

E6 La energía potencial elástica es $U_E = \frac{1}{2} k\, x^2 = \frac{1}{2} 200 \frac{N}{m} (0{,}001\, m)^2 = 10^{-4}\ J$

E7 La energía mecánica es constante por ser el sistema muelle-masa oscilante, conservativo.

$$U_E = \frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} 3{,}2.10^2 \frac{N}{m} (0{,}25\, m)^2 = 10\ J$$

E8 **a)** La energía cinética $E_C = \frac{1}{2} k \left(A^2 - x^2 \right) = \frac{1}{2} 400 \frac{N}{m} \left(0{,}1^1 - 0{,}05^1 \right) m^2 = 1{,}5\ J$

La energía potencial $U_E = \frac{1}{2} k\, x^2 = \frac{1}{2} 400 \frac{N}{m} 0{,}05^2\ m^2 = 0{,}5\ J$

b) La energía mecánica $E_m = E_C + U_E = 1{,}5\ J + 0{,}5\ J = 2\ J$

E9 La constante recuperadora vale: $k = \frac{F'}{l - l_o} = \frac{10\, kg \cdot\ 9{,}8\, m/s^2}{5.10^{-3}\, m} = 19600 \frac{N}{m}$

El periodo: $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{10\, kg}{19600\ N/m}} = 0{,}14\ s$

E10 La aceleración de la gravedad $g = \frac{4\pi^2\ L}{T^2} = \frac{4\pi^2\ 1\, m^2}{2^2\, s^2} = 9{,}87 \frac{m}{s^2}$

■ **Problemas**

P1 La frecuencia angular: $\omega = 2\pi \frac{3000}{60} \frac{rad}{s} = 100\,\pi \frac{rad}{s}$

$$x = 0{,}05\ sen\, 100\,\pi\, t$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 5\,\pi \cos 100\pi\, t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -500\,\pi^2\ sen\, 100\pi\, t$$

P2 La velocidad $v = A\,\omega \cos\left(\omega t + \theta o\right) = 12\,\pi \cos\left(\omega\, t + \theta_o\right)$

Como la velocidad se anula en las posiciones extremas, el tiempo transcurrido de una a otra es la mitad de un periodo, de modo que: $T = 2 \cdot (5 - 1)\ s = 8\ s$.

La amplitud es $A = \frac{12\,\pi}{\omega} = \frac{12\,\pi\ m/s}{2\pi / 8\ s} = 48\, m$

Para hallar la fase inicial debemos considerar que cuando $t = 1\ s$, es $v = 0$; $0 = 12\,\pi \cos\left(\frac{2\pi}{8} 1 + \theta_0\right)$

$$\frac{2\pi}{8}+\theta_o=\pm\frac{\pi}{2};\qquad \begin{cases}\theta_o=\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}\\ \theta_o=-\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{8}=-\frac{3\pi}{4}\end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación de la elongación $x=48\,sen\left(\frac{2\pi}{8}t+\theta_o\right)$; ahora bien de las dos soluciones solo una verifica que cuando $t = 1\ s$, es $x = 48\ m$. Ensayando con las dos:

$$sen\left(\frac{2\pi}{8}1+\frac{\pi}{4}\right)=sen\ \frac{\pi}{2}=1;\qquad sen\left(\frac{2\pi}{8}1-\frac{3\pi}{4}\right)=sen\ \frac{-\pi}{2}=-1$$

La solución buena para la fase inicial es $\theta_o=\pi/4$. En consecuencia:

$$x=48\,sen\left(\frac{2\pi}{8}t+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$v=\frac{dx}{dt}=12\,\pi\cos\left(\frac{2\pi}{8}t+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$a=\frac{dv}{dt}=-12\,\pi\cdot\frac{2\pi}{8}sen\left(\frac{2\pi}{8}t+\frac{\pi}{4}\right)=-3\,\pi^2\ sen\left(\frac{2\pi}{8}t+\frac{\pi}{4}\right)$$

P3 La constante recuperadora $k=\frac{F'}{l-l_o}=\frac{0{,}150\ kg\cdot 9{,}8\ m/s^2}{0{,}05\ m}=29{,}4\ \frac{N}{m}$

El periodo de la jaula vacía es: $T_1=2\pi\sqrt{\frac{1{,}2\ kg}{29{,}4\ N/m}}=1{,}27\ s$

El periodo de la jaula con pájaro: $T_2=2\pi\sqrt{\frac{(1{,}2+0{,}150)\ kg}{29{,}4\ N/m}}=1{,}35\ s$

P4 $k=\frac{4\pi^2\ m}{T^2}=\frac{4\pi^2\ 2\ kg}{0{,}60^2\ s^2}=219{,}3\ \frac{N}{m}$

a) $v=\omega\sqrt{A^2-x^2}$ el valor máximo lo toma cuando $x = 0$; $v_{m\acute{a}x}=\frac{2\pi}{0{,}60\ s}0{,}30\ m=\pi\ m/s$

$$E_{C,max}=\frac{1}{2}2\ kg\ \pi^2\ \frac{m^2}{s^2}=9{,}89\ J$$

b) $U_{E,max}=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}219{,}3\frac{N}{m}0{,}30^2\ m^2=9{,}87\ J$

d) $v(0{,}15)=\frac{2\pi}{0{,}60\ s}\sqrt{0{,}30^2\ m^2-0{,}15^2\ m^2}=2{,}72\ m/s$

$$E_C\,(0{,}15)=\frac{1}{2}2\ kg\cdot(\ 2{,}72\ m/s)^2=7{,}40\ J$$

$$U_E(0{,}15)=\frac{1}{2}219{,}3\frac{N}{m}(0{,}15\ m)^2=2{,}47\ J;\qquad E_m=E_C+E_P=7{,}40\ J+2{,}47\ J=9{,}87\ J$$

P5 **a)** El sistema masa-muelle con la masa vertical oscilando, es un sistema que conserva la energía mecánica, pero ahora la energía potencial es de dos clases, la gravitatoria y la elástica. Además tiene energía cinética.

Tomando un origen de referencia $x = 0,$ en la posición que ocupa la masa justo al suspenderla del muelle, antes de que éste empiece a alargarse y sin predecir el signo de la posición que alcanza al alargarse, resulta que la energía mecánica vale lo mismo en cualquier posición por que se conserva, o lo que es lo mismo, su variación es nula.

$$\Delta E_m = E_{m,\, final} - E_{m,\, inicial} = 0$$

$$(E_{P,f} - E_{P,i})_{Gravitatoria} + (U_{E,f} - U_{E,i})_{Elástica} + (E_{C,f} - E_{C,i})_{Cinética} = 0$$

$$(m\,g\,x - 0) + \left(\frac{1}{2}k\,x^2 - 0\right) + \left(\frac{1}{2}m\,v^2 - 0\right) = 0$$

Para determinar la posición más alejada de la masa, en ella su velocidad es nula, por lo que sustituyendo en la anterior resulta:

$$4\,kg \cdot 9,8\frac{N}{kg}\;x + \frac{1}{2}400\frac{N}{m}x^2 = 0\;; \qquad (39,2\,m + 200\,x)\;x = 0\;\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \dfrac{-39,2}{200}\,m = -0,196\,m \end{cases}$$

El signo negativo indica que ha descendido $0,196\ m$.

b) Ahora oscila alrededor de una posición intermedia entre x_1 y x_2

$$x_E = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0 + (-0,196)}{2} = -0,098\,m$$

c) La amplitud $|A| = |x_2 - x_E| = |-0,196 - (-0,098)|\,m = 0,098\,m$

P6 Consideraremos que la energía mecánica del sistema masa-muelle se conserva constante. Tomamos una sistema de referencia $x = 0,$ en la posición que ocupa la parte superior del muelle sin deformar, Al caer la masa desde el reposo $v_o = 0,$ desde una altura $h,$ comprime el muelle una longitud $x,$ y aplicando que la variación de energía mecánica será nula resulta:

$$\Delta E_m = E_{m,\, final} - E_{m,\, inicial} = 0$$

$$(E_{P,f} - E_{P,i})_{Gravitatoria} + (U_{E,f} - U_{E,i})_{Elástica} + (E_{C,f} - E_{C,i})_{Cinética} = 0$$

$$(m\,g\,x - mgh_o) + \left(\frac{1}{2}k\,x^2 - 0\right) + \left(\frac{1}{2}m\,v^2 - \frac{1}{2}mv_o^2\right) = (m\,g\,x - mgh_o) + \left(\frac{1}{2}k\,x^2 - 0\right) + \left(\frac{1}{2}m\,v^2 - 0\right) = 0$$

Como además en la posición de máxima compresión es $v = 0\;;$ queda:

$$\frac{1}{2}kx^2 + mgx - mgh_o = 0; \quad \frac{1}{2}600\,x^2 + 20 \cdot 9,8\;x - 20 \cdot 9,8 \cdot 2 = 0\;; \quad x_1 = +0,86\ m\;; \quad x_2 = -1,52\ m$$

Analizando las dos soluciones, la x_1 no corresponde porque está situada por encima del muelle donde tomamos $x=0$. La solución correcta es la negativa $x_2 = -1,52\ m$.

b) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{20\,kg}{600\,N/m}} = 1,15\,s$

P7 a) El periodo vale: $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{1,8\,m}{9,8\,m/s^2}}=2,7\,s$

b) El tiempo es la cuarta parte de un periodo $t=\frac{T}{4}=\frac{2,7\,s}{4}=0,67\,s$

c) El periodo del péndulo simple es independiente de la masa oscilante de modo que no sufre ninguna modificación por esta causa.

d) La altura que sube la partícula es $l=l_o\left(1-cos\,10^o\right)=1,8\,m\left(1-cos\,10^o\right)=0,027\,m$

Del principio de conservación de la energía.

$$\frac{1}{2}mv^2=mgh;\qquad v=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\cdot 9,8\cdot 0,027}=0,73\frac{m}{s}$$