SOLUCIONES EJERCICIOS DE GRAVITACIÓN

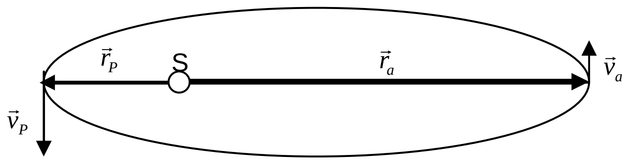
C1 El modelo de Ptolomeo era un modelo geocéntrico en el que la Tierra ocupaba el centro del Universo y en el que se suponía que los planetas describían ciclos y hemiciclos para poder explicar las trayectorias observables.

C2 En realidad no solo influye la acción de la Luna sobre el movimiento de la Tierra, también tienen influencias los demás planetas y asteroides del Sistema Solar, lo que sucede es que su influencia es de muchos ordenes de magnitud más pequeña que la del Sol debido a su enorme masa en comparación con la del resto de los otros astros. La acción de la atracción lunar sobre la Tierra se manifiesta sobre todo en la formación de las mareas.

C3 La fuerza que actúa sobre los planetas es central por lo tanto el momento que ejerce respecto del Sol es nula y en consecuencia el momento angular del planeta respecto del Sol es constante. En efecto:

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} = 0; \; como \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = Cte.$$

Sin embargo en el afelio y en el perihelio por ser los puntos más alejados del Sol de la trayectoria elíptica del planeta, los vectores de posición son perpendiculares a los vectores velocidad.



La conservación de $\vec{L}$ implica: $\vec{r}_a \wedge m\vec{v}_a = \vec{r}_P \wedge m\vec{v}_P$ y de la igualdad de los módulos.

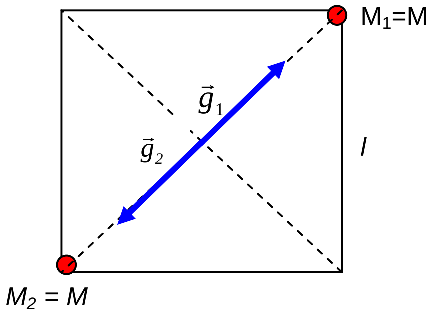
$$r_a m v_a = r_P m v_P \quad \Rightarrow \quad r_a v_a = r_P v_P$$

C4 La intensidad del campo gravitatorio vale en módulo $g = G\dfrac{m}{r^2}$.

En un punto situado a una distancia *2r* será: $g_1 = G\dfrac{m}{(2r)^2} = \dfrac{1}{4}G\dfrac{m}{r^2} = \dfrac{g}{4}$

Si la distancia es r/2: $g_2 = G\dfrac{m}{(r/2)^2} = 4G\dfrac{m}{r^2} = 4g$

C5 La intensidad del campo gravitatorio será nula pues por el principio de superposición es la suma de dos vectores campo, iguales y de sentidos opuestos.

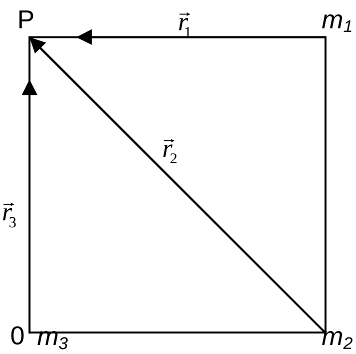


C6 Despreciando la influencia de la resistencia de la atmósfera al movimiento del cohete lanzador, entonces la acción sobre el movimiento solo es debida a la fuerza gravitatoria que es conservativa y el trabajo realizado solo dependerá de la posición inicial y final siendo independiente del camino seguido. En consecuencia el trabajo sería el mismo.

C7 Un satélite en órbita se mueve en un campo gravitatorio de modo que posee energía potencial gravitatoria (que es negativa) y energía cinética (que es siempre es positiva). Si la energía cinética fuera mayor que la potencial, el balance sería positivo y entonces el satélite tendría una velocidad superior a la de escape y saldría del campo gravitatorio.

EJERCICIOS

E1 Tomando unos ejes cartesianos con origen en m_3 resultan los siguientes vectores de posición:



Donde los vectores unitarios son respectivamente:

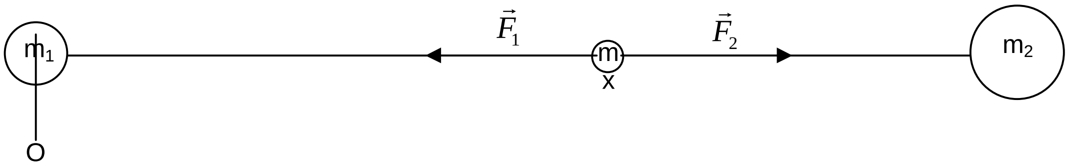
$$\vec{u}_1 = -\vec{i}\,; \qquad \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} + \vec{j}); \qquad \vec{u}_3 = \vec{j}$$

La fuerza resultante sobre la masa en P es la suma vectorial de las fuerzas que ejercen sobre ella cada una de las otras masas de modo independiente. Aplicando la ecuación de la ley de Gravitación Universal:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = -Gm\left[\frac{m_1}{r_1^2}\vec{u}_1 + \frac{m_2}{r_2^2}\vec{u}_2 + \frac{m_3}{r_3^2}\vec{u}_3\right]$$

$$\vec{F} = -6,67.10^{-11}\cdot 150\left[\frac{100}{1^2}(-\vec{i}\,) + \frac{200}{1^2}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\vec{i} + \vec{j}\right) + \frac{100}{1^2}\vec{j}\right] = 2,4.10^{-6}\,\vec{i} - 2,4.10^{-6}\,\vec{j}$$

E2 Para que se equilibren las fuerzas sobre la masa m tiene que suceder que la suma de las fuerzas sea nula.



$$\vec{F}_1 = -G\frac{m_1 m}{x^2}\vec{i} \;; \qquad \vec{F}_2 = -G\frac{m_2 m}{(200-x)^2}\left(-\vec{i}\right)$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 = Gm\left[-\frac{m_1}{x^2} + \frac{m_2}{(200-x)^2}\right]\vec{i} \;; \qquad -(200-x)^2 m_1 + m_2 x^2 = 0 \;; \qquad x = 61,8\,m$$

E3. La constante de la tercera ley de Kepler vale para los satélites de Júpiter vale:

$$C = \frac{G \cdot M_J}{4\pi^2} = \frac{6,67.10^{-11} \cdot 1,89.10^{27}}{4\pi^2} = 3,19.10^{15}\,\frac{m^3}{s^2}$$

E4. Por la tercera ley de Kepler para todos los planetas que giran alrededor del Sol:

$$C = \frac{a^3}{T^2} = \frac{GM_S}{4\pi^2} \;; \qquad M_S = \frac{4\pi^2 . a^3}{G.T^2} = \frac{39,5 \cdot 2,87^3 . 10^{36}}{6,67.10^{-11} \cdot 2,67^2 . 10^{18}} = 2,01.10^{30}\,kg$$

E5. De la tercera ley de Kepler teniendo en cuenta que la Luna gira alrededor de la Tierra resulta:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G\;M_T}{4\pi^2} \;; \quad M_T = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2\left(3,84.10^8\right)^3}{6,67.10^{-11}\left(2,36.10^6\right)^2} = 6,02.10^{24}\,kg$$

E6 **.** De la tercera ley de Kepler aplicada a todos los satélites que giran alrededor de Marte resulta después de despejar:

$$M_M = \frac{4\pi^2}{G}\frac{r^3}{T^2} \,,$$

El periodo T en segundos vale T = 27648 s, y con los otros datos del problema, queda

$$M_M = \frac{4\pi^2}{6,7.10^{-11}}\frac{9000^3}{27648^2} = 0\acute{}56.10^{24}\,kg$$

E7. Para determinar la velocidad de Venus como la fuerza gravitatoria actúa de centrípeta, la igualamos a la expresión mecánica de una fuerza centrípeta.

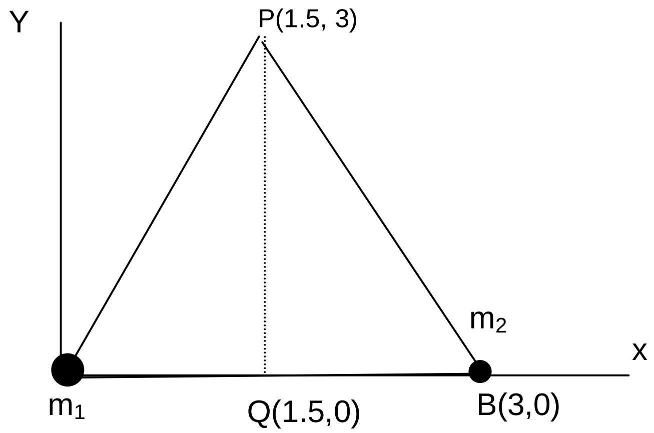
$$F = \frac{GM_S m_V}{r^2} = m_V\,\frac{v^2}{r}$$

despejando resulta: $v = \sqrt{\frac{G\,M_S}{r}} = \sqrt{\frac{6,67.10^{-11} \cdot 2,01.10^{30}}{1,08.10^{11}}} = 35233\,\frac{m}{s}$

El periodo es el tiempo que tarda en dar una vuelta completa alrededor del Sol.

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 1,08.10^{11}}{35233} = 19259923\;s = 222,9\,dias$$

E8



Determinamos los vectores de posición y los unitarios correspondientes:

$$\vec{r}_{1p} = (1{,}5-0)\vec{i} + (3-0)\vec{j}\ ; \qquad \vec{u}_{1p} = \frac{1{,}5}{3{,}35}\vec{i} + \frac{3}{3{,}35}\vec{j} = 0{,}45\vec{i} + 0{,}89\vec{j}$$

$$\vec{r}_{2p} = (1{,}5-3)\vec{i} + (3-0)\vec{j} = -1{,}5\vec{i} + 3\vec{j}\ ; \qquad \vec{u}_{2p} = -0{,}45\vec{i} + 0{,}89\vec{j}$$

$$\vec{g}_p = -G\frac{m_1}{r_{1p}^2}\vec{u}_{1p} - G\frac{m_2}{r_{2p}^2}\vec{u}_{2p} =$$

$$= -6{,}67.10^{-11}\frac{N\cdot m^2}{kg^2}\left[\frac{5\,kg}{\left(3{,}35.10^{-2}m\right)^2}\left(0{,}45\vec{i} + 0{,}89\vec{j}\right) + \frac{8kg}{\left(3{,}35.10^{-2}m\right)^2}\left(-0{,}45\vec{i} + 0{,}89\vec{j}\right)\right]$$

$$\vec{g}_p = 8{,}0.10^{-8}\vec{i} - 6{,}9.10^{-7}\vec{j}\ \ N/kg$$

$$\vec{r}_{1Q} = 1{,}5\vec{i}\ ; \qquad \vec{u}_{1Q} = \vec{i}$$

$$\vec{r}_{2Q} = -1{,}5\vec{i}\ ; \qquad \vec{u}_{2Q} = -\vec{i}$$

$$\vec{g}_Q = -G\frac{m_1}{r_{1Q}^2}\vec{u}_{1Q} - G\frac{m_2}{r_{2Q}^2}\vec{u}_{2Q} =$$

$$= -6{,}67.10^{-11}\frac{N\cdot m^2}{kg^2}\left[\frac{5\,kg}{\left(1{,}5.10^{-2}m\right)^2}\left(\vec{i}\right) + \frac{8kg}{\left(1{,}5.10^{-2}m\right)^2}\left(-\vec{i}\right)\right] = 8{,}9.10^{-7}\vec{i}\ N/kg$$

E9. El campo resultante en *P*, es por el principio de superposición:

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$$

Donde los módulos g_1 y g_2 valen:

$$g_1 = G\frac{m_1}{r_1^2} = G\frac{8^2.10^4}{4.10^{-2}} = 16.10^6.G \qquad \text{y} \qquad g_2 = G\frac{m_1}{r_2^2} = G\frac{6^2.10^4}{1{,}5^2.10^{-2}} = 16.10^6.G$$

Tomando unidades del S.I. $g_1 = g_2 = 16.10^6.\ 6{,}7.10^{-11} = 1{,}07.10^{-3}\ N/kg$

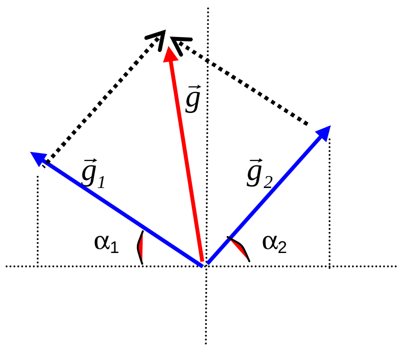
Los vectores unitarios:

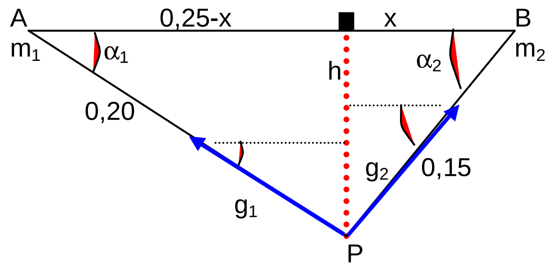
$$\vec{u}_1 = -\cos\alpha_1 \vec{i} + \mathrm{sen}\alpha_1 \vec{j} = -\frac{0{,}25 - x}{0{,}20}\vec{i} + \frac{h}{0{,}20}\vec{j}$$

$$\vec{u}_2 = \cos\alpha_2 \vec{i} + \mathrm{sen}\,\alpha_2 \vec{j} = \frac{x}{0{,}15}\vec{i} + \frac{h}{0{,}15}\vec{j}$$

Los vectores campo:

$$\vec{g}_1 = g_1(\cos\alpha_1 \vec{i} + \mathrm{sen}\,\alpha_1 \vec{j})$$
$$\vec{g}_2 = g_2(\cos\alpha_2 \vec{i} + \mathrm{sen}\,\alpha_2 \vec{j})$$





Tenemos que hallar el valor de x. En el triángulo ABP, que rectángulo por ser sus tres lados números pitagóricos, el cateto BP es media proporcional entre la hipotenusa y x, $0{,}25^2 = 0{,}25.x$; de donde x = 0,09 m. También la altura h es media proporcional entre los dos segmentos en que divide a la hipotenusa, $h^2 = 0{,}16 \cdot 0{,}09$,
de donde h = 0,12 m

Así que los vectores unitarios son:

$$\vec{u}_1 = -\frac{0{,}25 - 0{,}09}{0{,}20}\vec{i} + \frac{0{,}12}{0{,}20}\vec{j} = -0{,}8\vec{i} + 0{,}6\vec{j}\ ;\ \text{y} \quad \vec{u}_2 = \frac{0{,}09}{0{,}15}\vec{i} + \frac{0{,}12}{0{,}15}\vec{j} = 0{,}6\vec{i} + 0{,}8\vec{j}$$

El campo resultante en P es $\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$ $=1.07.10^{-3}$ $[(-0{,}8+0{,}6)\vec{i} + (0{,}8+0{,}6)\vec{j}]$ $=1{,}07.10^{-3}$ $[(-0{,}2)\vec{i} + 1{,}4\vec{j}]$

El vector $[(-0{,}2)\vec{i} + 1{,}4\vec{j}]$ tiene de módulo $\sqrt{0{,}2^2 + 1{,}4^2} = \sqrt{2}$, que podemos sacar como factor y queda:

$$\vec{g} = 1{,}07\sqrt{2}\,.10^{-3}\,[(-0{,}2/\sqrt{2})\vec{i} + (1{,}4/\sqrt{2})\vec{j}]\ \mathrm{N/kg}$$

o lo que es lo mismo,

$$\vec{g} = 1{,}5.\ 10^{-3}\ .\ [-0{,}14\vec{i} + 0{,}99\vec{j}]\ \mathrm{N/kg}$$

que está en la forma módulo, g = 1,5. 10^{-3} N/kg, y unitario, $[-0{,}14\vec{i} + 0{,}99\vec{j}]$
En esta forma podemos encontrar el arc sen(–0,14) = 98º , el ángulo que forma el campo resultante con la parte positiva del eje OX de abscisas.

Sabemos que el campo resultante tiene por módulo g = 1,5. 10^{-3} N/kg y forma un ángulo de 8º la perpendicular por P a la recta AB donde se encuentran las masas m_1 y m_2 .

Para calcular el potencial resultante en P se suman los potenciales que crean en P cada una de las dos masas,

V = $V_1 + V_2$, sabiendo que:

$$V_1 = -G\frac{m_1}{r_1} = -6{,}7.10^{-11}\frac{800}{0{,}2} = -2{,}7.10^{-7}\ J/kg$$

$$V_2 = -G\frac{m_2}{r_2} = -6{,}7.10^{-11}\frac{600}{0{,}15} = -2{,}7.10^{-7}\ J/kg$$

resulta el potencial en P

$$V = -5{,}4.10^{-7}\ J/kg$$

E10. Aplicando la definición de intensidad del campo gravitatorio, la intensidad de la gravedad en la superficie de la Luna es la fuerza con que la Luna atrae a la masa de *1 kg* su valor se obtiene de la ecuación:

$$g_L = \frac{G\,M_L}{R_L^2} = \frac{6{,}67.10^{-11}\ N\cdot m^2\cdot kg^{-2}\ \cdot 7{,}36.10^{22}\ kg}{\left(1738.10^3\ m\right)^2} = 1{,}63\frac{N}{kg} = 1{,}63\frac{m}{s^2}$$

E11. El campo creado por la tierra en un punto exterior a ella vale $\vec{g} = -G\frac{M_T}{r^2}.\vec{u}_r$

Aplicando al caso que nos ocupa, $\vec{g} = -G\frac{M_T}{60^2.R_T^2}.\vec{u}_r = \frac{1}{60^2}(-G\frac{M_T}{R_T^2}\vec{u}_r) = \frac{\vec{g}_T}{3600}$

Es decir que el campo en la órbita de la Luna vale 3600 veces menos que en la superficie de la Tierra donde según sabemos vale $\vec{g}_T = -9{,}8\vec{u}_r$ N/kg.

La aceleración de la gravedad vale, por tanto, $\vec{g} = -\frac{9{,}8}{3600}\vec{u}_r = -2{,}7.10^{-3}\ \vec{u}_r\ m.s^{-2}$ en la órbita de la Luna.

E12. La distancia del satélite hay que referirla a unos ejes en el centro de la Tierra. Llamando con *P* a la posición en la órbita será: r_P= *6371km + 600 km = 6971 km* y designando con *Q* a la posición sobre la superficie terrestre, r_Q = *6371 km*. Resulta de aplicar [3.11].

$$W_{P\rightarrow Q} = GMm\left(\frac{1}{r_Q}-\frac{1}{r_P}\right) = 6{,}67.10^{-11}\ N\,m^2\,kg^{-2}\cdot 5{,}98.10^{24}\ kg\cdot\ 400\,kg\left(\frac{1}{6371.10^3\ m}-\frac{1}{6971.10^3\ m}\right) = 2{,}16.10^9\ J$$

Otro modo más interesante de resolverlo es relacionando el trabajo con la variación de energía potencial, por ser el campo gravitatorio un campo conservativo. Entonces mediante la ecuación [3.13] que dice: El trabajo realizado por la fuerza gravitatoria sobre una masa, es igual a menos el incremento de su energía potencial, resulta:

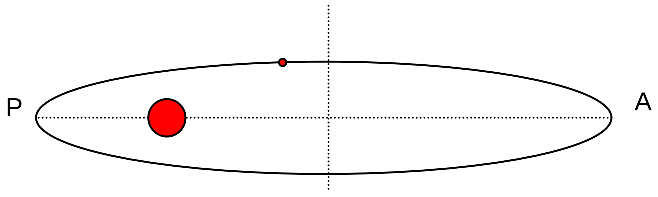
$$W_{P\rightarrow Q} = -\Delta U = -(U_Q - U_P) = -\left(\frac{-GMm}{r_Q} - \left(\frac{-GMm}{r_P}\right)\right) = GMm\left(\frac{1}{r_Q}-\frac{1}{r_P}\right) = 2{,}16.10^9\ J$$

Recuerde que la variación de la energía potencial entre dos puntos, se acostumbra a expresar como diferencia entre la del punto final *Q* menos la del punto inicial *P*.

E13. Sustituyendo en la ecuación de la energía potencial gravitatoria resulta:

$$U = -\frac{GM_S\,m_J}{a_J} = -\frac{6{,}67.10^{-11}\ N\,m^2\,kg^{-2}\cdot 1{,}98.10^{30}\ kg\cdot 1{,}89.10^{27}\ kg}{777{,}4.10^9\ m} = -3{,}21.10^{35}\ J$$

E14.



a) Una unidad astronómica equivale a la longitud del radio de la órbita terrestre, 1 U.A. = $1.49.10^{11}$ m.

Tenemos para el incremento de la energía potencial gravitatoria.

$$\Delta E_{A,P} = -GM_S.m_C\left[\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_A}\right] = -GM_S m_C\left[\frac{r_A - r_P}{r_A.r_P}\right]$$

que puestos los datos del ejercicio, donde m_C es la masa del cometa, da,

$$\Delta E_{A,P} = -6{,}67.10^{-11}.1{,}99.10^{30} m_C\left[\frac{7{,}2-0{,}6}{7{,}2.0{,}6.1.49.10^{11}}\right] = -6{,}84.10^{8}\cdot m_C \quad J$$

Esto es, que por cada kg de masa del cometa se produce una variación de energía de $-6{,}84.10^8$ J

b) Tenemos que el trabajo de la fuerza gravitatoria es igual al incremento de energía potencial cambiado de signo,

$$\Delta W_{A,P} = -\Delta E_{A,P} = 6{,}84.10^{8}\cdot m_C \quad J$$

Es decir , que por cada kilogramo de masa del cometa, se efectúa un trabajo de $6{,}84.10^8$ J

E15. El satélite se encuentra sobre la superficie de la Luna a la distancia R_L de su centro y hay que proporcionarle una energía cinética para que pueda escapar de la misma, es decir a una distancia en la que su energía potencial gravitatoria sea nula. Además, basta con que alcance tal posición con velocidad nula, por lo que allí se verificará que su energía mecánica, suma de la cinética más la potencial será nula.

Para efectuar las operaciones, demos una masa de m = 1000 kg al satélite
Además como el campo gravitatorio es conservativo, también debe vale cero la energía mecánica en la Luna antes de realizar el lanzamiento. En consecuencia:

$$E_C + U = E_C - \frac{GM_L\, m}{R_L} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad E_C = \frac{6{,}67.10^{-11}\ N\ m^2\ kg^{-2}\ \cdot 7{,}36.10^{22}\ kg\ \cdot 1000kg}{1738.10^3\ m} = 2{,}82.10^9\ J$$

$$v = \sqrt{\frac{2\ E_C}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 2{,}82.10^9\ J}{1000\,kg}} = 2377\,m/s = 2{,}38\,km/s$$

Se puede observar que es muy inferior a la velocidad de escape en la Tierra que es de *11,2 km/s.*

E16. La velocidad de escape, $v_e = \sqrt{G\frac{2M}{r}}$

Necesitamos la masa M del asteroide, pero conocemos su densidad ρ = 2 cm^{-3} = 2000 kg·m^{-3} y su radio, r = $2{,}5.10^3$ m.

Calculamos su masa,

$$M = \frac{4}{3}\pi \cdot 2{,}5^3.10^9 \cdot 2.10^3 = 1{,}31.10^{14}\,kg$$

a) con esto su velocidad de escape es,

$$v_e = \sqrt{6.67.10^{-11}\,\frac{2.1{,}31.10^{14}}{2{,}5.10^3}} = 2{,}64\,m/s$$

b) Esta velocidad no depende de la masa del astronauta, por tanto tiene el mismo valor si recoge 50 kg de rocas.

E17. La distancia se determina respecto del centro de la Tierra $r = 6371\ km + 600\ km = 6971\ km$

La fuerza gravitatoria actúa de centrípeta así que igualándolas resulta para la velocidad:

$$v = \sqrt{\frac{G\ M_T}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67.10^{-11}\ \cdot\ 5{,}98.10^{24}}{6971.10^3}} = 7564{,}3\ \frac{m}{s}$$

En cuanto al periodo: $T = \dfrac{2\pi r}{v} = \dfrac{2\pi \cdot 6971.10^3}{7564{,}3} = 5790{,}4\ s = 1h\,36\ min\ 36\ s$

E18. El periodo del satélite vale T = 24.3600 / 16 = 5400 s

De la tercera ley de Kepler: $r_o^3 = \dfrac{G.m_T.T^2}{4\pi^2}$, Sustituyendo los datos:

$r_o^3 = \dfrac{6{,}67.10^{-11}.5{,}98.10^{24}.5{,}4^2.10^6}{4\pi^2} = 295.10^{18}\,m^3$; el radio r_o = $6{,}65.10^6$ m,

La altura sobre la superficie de la Tierra la obtenemos restando de este radio el radio terrestre,

$h = r_o - R_T = 6{,}65.10^6 - 6{,}37.10^6 = 0{,}28.10^6\ m$, que equivale a 280 km

h =280 km

E19. La distancia hay que referirla al centro de la Tierra:

$r = R_T + 35800\ km = 6371\ km + 35800\ km = 42171\ km$

$$g' = \frac{GM_T}{r^2} = \frac{g_o.R_T^2}{r^2} = \frac{9{,}81 m.s^{-2}.6371^2 km^2}{42171^2 km^2} = 0{,}22\frac{m}{s^2}$$

- **Problemas**

P1. El año local es el tiempo que emplea un planeta en completar una vuelta alrededor del Sol. Este tiempo lo designamos como un periodo y para el caso de la Tierra se toma como unidad, $1 T_T = 1$ *año.*

Por la tercera ley de Kepler, como Marte y la Tierra giran alrededor del Sol se cumple:

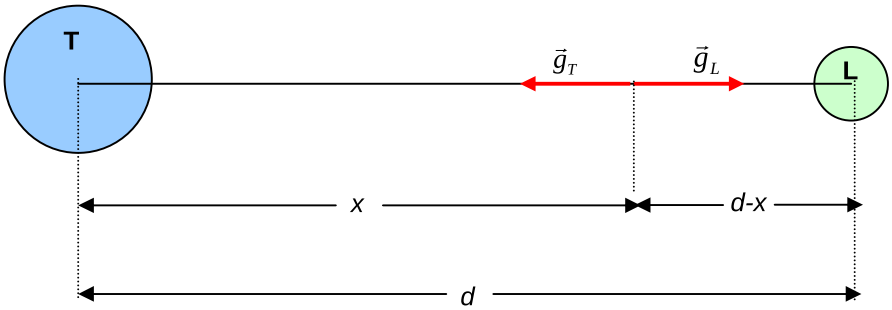
$$\frac{a_T^3}{T_T^2} = \frac{a_M^3}{T_M^2} \quad \Rightarrow$$

$$T_M = 1\,\text{año marciano} = T_T \left(\frac{a_M}{a_T}\right)^{3/2} = 1\,\text{año terrestre} \left(\frac{1{,}52\ UA}{1\ UA}\right)^{3/2} = 1{,}87\ \text{año terrestre}$$

P2. El módulo de la fuerza de atracción, es, $F = G\dfrac{M_S\, m_v}{r_{SV}^2}$ en la cual aplicando los datos del problema, en los que consideramos que $r_{SV} = 1{,}08.10^{11}$ *m*

$$F = 6{,}67.10^{-11}\frac{1{,}98.10^{30}.4{,}87.10^{24}}{1{,}08^2.10^{22}} = 5{,}51.10^{22}\,N$$

P3. La relación entre las masas de la Tierra y de la Luna es $\dfrac{M_T}{M_L} = \dfrac{81}{1} \Rightarrow M_T = 81\, M_L$



La fuerza sobre una masa *m* se puede expresar como el producto de *m* por la intensidad del campo gravitatorio en el lugar donde se encuentra. El ejercicio señala que la fuerza sobre *m* es nula.

$$\vec{F}_G = m\,\vec{g} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{g} = 0$$

Por el principio de superposición de campos, $\vec{g}$ es la suma de los campo gravitatorios terrestre y lunar en el punto considerado, $\vec{g} = \vec{g}_T + \vec{g}_L = 0$. De donde se deduce, ver figura, que los dos campo son vectores iguales y de sentidos contrarios.

Del enunciado se deduce que $d = 60\ R_T = 60 \cdot 6371$ *km* $= 382\ 860$ *km.*

De la igualdad de los vectores se deduce la igualdad de sus módulos, de modo que: $\dfrac{G\,M_T}{x^2} = \dfrac{G\,M_L}{(d-x)^2}$

Sustituyendo la relación entre las masas, la distancia *d,* operando y simplificando, se obtiene la ecuación de segundo grado:

$$80\,x^2 - 61{,}92.10^6 + 1{,}18.10^{13} = 0$$

La ecuación proporciona dos soluciones $x_1 = 434\ 982$ *km* y $x_2 = 339\ 094$ *km.* La primera x_1 es absurda pues solo puede haber puntos en los que el campo gravitatorio resultante sea nulo, entre los dos astros, obsérvese la figura, y tal solución estaría situada más allá de la Luna. En consecuencia esta solución debe ser rechazada.

La solución que se busca es x_2 = *339 094 km.* De modo que como cabría esperar, el citado punto está más cerca de la Luna que de la Tierra por ser menor su campo gravitatorio.

P4. Sea el campo gravitatorio en la superficie terrestre g, y a una altura h, g_h .La relación entre ambas expresiones queda:

$$\frac{g_h}{g}=\frac{G\frac{M_T}{(R_T+h)^2}}{G\frac{M_T}{R_T^2}}=\left[\frac{R_T}{R_T+h}\right]^2$$

El radio de la Tierra vale R_T= 637.10^4 m, y , R_T + h = 638.10^4 m, con lo que el cociente:

$$\frac{g_h}{g}=\left[\frac{R_T}{R_T+h}\right]^2=\left(\frac{637}{638}\right)^2=0{,}997$$

y de aquí sale el error relativo

$$\frac{g-g_h}{g}=\frac{g}{g}-\frac{g_h}{g}=1-0{,}997=0{,}001=0{,}001\frac{100}{100}=0{,}1\%$$

P5. La masa la expresamos en función de la densidad y del volumen $M=\rho V$. La intensidad del campo gravitatorio es:

$$g=\frac{GM}{R^2}=\frac{G\rho V}{R^2}=\frac{G\rho\frac{4}{3}\pi R^3}{R^2}=\frac{4}{3}\pi G\rho R=\frac{4\cdot\pi\cdot 6{,}67.10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}\ \cdot 3030\,kg\,m^{-3}\ \cdot\ 1563.10^3\ m}{3}=1{,}32\frac{m}{s^2}$$

P6. El trabajo realizado por la fuerza gravitatoria es igual al incremento de la energía potencial cambiado de signo, pero el trabajo de una fuerza exterior que ser igual al incremento de la energía potencial sin cambiar de signo, es decir, $\Delta W_{1,2}=E_2-E_1$ **.** Donde el subíndice 2 denota a la Luna y el 1 a la superficie terrestre.

No valoramos el campo gravitatorio de la Luna considerándolo independiente del de la Tierra.

En nuestro caso tenemos que E_1= -GM_T / R_T, ya que está sobre la superficie de la Tierra.

El destino está en un punto de la órbita de la Luna alrededor de la Tierra y vale: E_2 = -GM_T / r_{TL}

El trabajo realizado es: $W_{1,2}=E_2-E_1=-G\frac{M_T}{r_{TL}}-(-G\frac{M_T}{R_T})=GM_T\left[\frac{1}{R_T}-\frac{1}{r_{TL}}\right]$

Para el cálculo aplicamos los datos:

$$W_{1,2}=GM_T\left[\frac{r_{TL}-R_T}{R_T.r_{TL}}\right]=6{,}67.10^{-11}\cdot 5{,}97.10^{24}\frac{(384-6{,}37)10^6}{384\cdot 6{,}37.10^6}=6{,}15.10^{13}\,J$$

Pero la Luna crea también su propio campo gravitatorio y en él la fuerza gravitatoria ayuda a la realización del viaje. Por Tanto el trabajo de su fuerza gravitatoria será:

$$W'_{1,2}=-(E'_2-E'_1)=-[-G\frac{M_L}{r_{TL}-R_L}-(-G\frac{M_L}{r_{TL}-R_T})]=GM_L\left[\frac{1}{r_{TL}-R_L}-\frac{1}{r_{TL}-R_T}\right]$$

Para su cálculo aplicamos los datos,

$$W'_{1,2} = -(E'_2 - E'_1) = GM_L \frac{R_L - R_T}{(r_{TL} - R_T)(r_{TL} - R_L)} = 6{,}67.10^{-11} \cdot 7{,}35.10^{22} \frac{(1{,}74 - 6{,}37)10^6}{378.10^3 \cdot 382.10^3} = -1{,}57.10^8\ J$$

Como se aprecia la influencia del campo gravitatorio lunar en el cálculo del trabajo es muy pequeño en órdenes de magnitud, frente al necesario para sacar al satélite de la gravedad terrestre.

P7. Por estar muy lejano respecto de unos ejes ligados a la Tierra tiene energía potencial *U = 0.* ya que se considera en el infinito*.* Por carecer de velocidad inicial respecto de los mismos ejes también es la $E_C = 0$. En consecuencia la energía mecánica.

$$E = U + E_C = 0$$

Como el campo gravitatorio es conservativo, cuando llegue a Tierra la energía mecánica seguirá siendo cero, pero estará situado a una distancia R_T del centro de la Tierra, y en este lugar es donde está situado el origen de referencia, por lo que poseerá energía potencial gravitatoria. Además como alcanza la superficie terrestre con una determinada velocidad tendrá además energía cinética.

$$-\frac{G M_t m}{R_T} + \frac{1}{2} m v^2 = 0; \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2G\ M_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67.10^{-11} \cdot\ 5{,}98.10^{24}}{6371.10^3}} = 11{,}19 \frac{km}{s}$$

$$E_C = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} 1kg \cdot \left(11190 \frac{m}{s} \right)^2 = 62{,}61.10^6\ J$$

P8. El radio de la órbita es: $r = 2 \cdot R_T = 2 \cdot 6371\ km = 12\ 742\ km.$

La fuerza gravitatoria actúa como centrípeta así que se puede escribir para los módulos:

$$\frac{G M_T\, m}{r^2} = m \frac{v^2}{r}; \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{G M_T}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67.10^{-11} \cdot\ 5{,}98.10^{24}}{12742.10^3}} = 5595 \frac{m}{s}$$

El periodo: $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 12\,742.10^3}{5595} = 14\,309\, s = 3{,}97\, h$

La energía cinética: $E_C = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} 1000\, kg \cdot 5595^2 \frac{m^2}{s^2} = 1{,}57.10^{10}\ J$

La energía potencial: $U = -\frac{G M_T\, m}{r} = -\frac{6{,}67.10^{-11} \cdot\ 5{,}98.10^{24} \cdot 10^3}{12742.10^3} = -\ 3{,}13.10^{10}\ J$

La energía mecánica: $E = E_C + U = 1{,}57.10^{10}\ J + (-3{,}13.10^{10}\ J) = -\ 1{,}56.10^{10}\ J$

Esta energía se mantiene constante por ser el campo gravitatorio conservativo, de modo que valdría lo mismo en el momento de hacer el lanzamiento sobre la superficie terrestre.

$$-1{,}56.10^{10}\ J = E_C - \frac{G M_T m}{R_T} = E_C - \frac{6{,}67.10^{-11}\ N\, m^2\, kg^{-2}\, 5{,}98.10^{24}\, kg \cdot 1000\, kg}{6\,371.10^3\, m}; \quad \Rightarrow \quad E_C = 4{,}70.10^{10}\ J$$

Velocidad de lanzamiento: $v = \sqrt{\frac{2 E_C}{m}} = \sqrt{\frac{2\ 4{,}70.10^{10}\ J}{1000\, kg}} = 9696\, m/s \approx 9{,}70 \frac{km}{s}$

P9. Para el satélite que está en órbita la variación de su energía potencial entre la órbita y tierra será:

$$U_O - U_T = -\frac{GM_T\, m}{r_O} - \left(-\frac{GM_T\, m}{R_T}\right) = GM_T\, m\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{r_O}\right)$$

$$U_O - U_T = \ 6{,}67.10^{-11}\ N\, m^2\, kg^{-2}\ \cdot 5{,}98.10^{24}\ kg \cdot 900\, kg\left(\frac{1}{6371.10^3\, m} - \frac{1}{42\,200\cdot 10^3\ m}\right) = 4{,}78.10^{10}\ J$$

El trabajo realizado para llevarlo a la citada órbita geoestacionaria, en la que no tiene velocidad ni energía cinética, respecto de unos ejes que giran con la Tierra, debe ser igual al incremento de la energía potencial gravitatoria por ser el campo gravitatorio conservativo. En efecto, para trasladarlo a la órbita hay que aplicar una fuerza F que actúe contra la fuerza gravitatoria F_G durante todo el desplazamiento. Como respecto de los ejes en Tierra, el satélite antes del lanzamiento y después, cuando está en la órbita geoestacionaria, carece de energía cinética. La ecuación de la energía permite escribir:

$$W_{FG} + W_F = \Delta E_C = 0\ ; \qquad \Rightarrow \qquad W_F = -\ W_{FG}$$

El trabajo de la fuerza aplicada W_F es igual pero de signo contrario, al que efectúa la fuerza gravitatoria W_{FG} en el mismo desplazamiento.

Pero el trabajo de la fuerza gravitatoria entre la superficie de la Tierra T y la órbita geoestacionaria O, está relacionado con la variación de energía potencial por: $W_{FG} = -\ (U_O - U_T)$; que sustituida en la anterior proporciona para el trabajo de la fuerza aplicada al satélite:

$$W_F = -\ [\ -(U_O - U_T)\ ] = U_O - U_T$$

Expresión análoga a la de la diferencia de energía potencial antes calculada. En consecuencia la fuerza F que es necesario aplicar para llevar al satélite hasta su órbita geoestacionaria, debe hacer un trabajo positivo de valor $4{,}78.10^{10}\ J$.

P10. De igualar la fuerza gravitatoria a la centrípeta se obtiene para la velocidad orbital

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

La podemos escribir en la forma $v = \sqrt{\frac{GM \cdot r}{r^2}} = \sqrt{g \cdot r} = \sqrt{\frac{4}{9} g_0 \cdot r}$

$$v = \sqrt{\frac{4}{9} 9{,}8 \cdot (3{,}2 + 6{,}4).10^6} = 6{,}47.10^3\, m/s$$

b)

c) La energía cinética del satélite en su órbita es $E_c = \frac{1}{2} 200kg \cdot \left(6{,}47.10^3\right)^2 \frac{m^2}{s^2} = 4{,}18.10^9\ J$

d) La energía potencial gravitatoria vale:

$$U = -G\frac{M_T m}{r} = -6{,}67.10^{-11}\frac{5{,}97.10^{24} \cdot 200}{9{,}6.10^6} = -8{,}3.10^9\ J$$