T1 CINEMÁTICA Y DINÁMICA

Cuestiones

C1. Es razonable estimarlo como una partícula, porque se consideran las dimensiones del automóvil muy pequeñas frente a las longitudes de las carreteras. Al estudiar el movimiento de rotación de las ruedas, ya hay que distinguir entre sus partes y no es útil la hipótesis de considerarlo exclusivamente como una partícula.

C2. La trayectoria entre dos puntos puede ser una línea curva, mientras que el desplazamiento es un vector que tiene por módulo la cuerda del arco que va desde un punto al otro de la trayectoria, aquí la distancia se refiere la módulo del vector desplazamiento. No es lo mismo el módulo del desplazamiento que la longitud de la trayectoria, salvo en el movimiento rectilíneo.

C3.

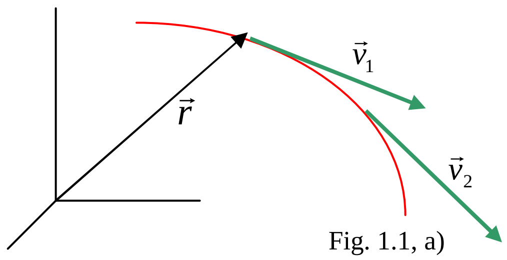


Fig. 1.1, a)

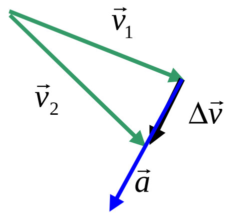


Fig. 1.1, b)

En la fig.1.1a, se muestra la dirección de los vectores posición, velocidad y aceleración. La velocidad es tangente a la trayectoria, pero la aceleración ha de tener la dirección de $\Delta\vec{v}$, fig 1.1, b, ya que resulta de multiplicar este vector por el escalar 1/Δt.

C4.

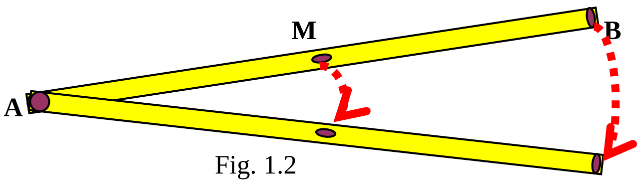


Fig. 1.2

Las magnitudes angulares y las lineales están relacionadas entre sí por el radio de la circunferencia que describen los puntos del cuerpo que gira.
Para el caso de las velocidades lineales, se tiene que $v = \omega \cdot R$.
En un sólido todos los puntos giran con la misma velocidad angular, ω en cada instante. Entonces para los puntos A y B es:

$$\omega_M = \omega_B = \omega.$$

En cambio si L es la longitud de la barra, la velocidad lineal de M es $v_M = \omega \cdot L/2$, mientras la velocidad lineal de B es $v_B = \omega \cdot L$. El resultado es que la velocidad lineal de B es doble de la de M, $v_B = 2 \cdot v_M$

C5- En un movimiento rectilíneo la aceleración normal es nula, ya que $a_n = \dfrac{|\vec{v}|^2}{R}$, y el radio de una recta es infinito.

La aceleración lineal en un movimiento uniforme es nula ya que su velocidad es constante en módulo, $|\vec{v}| = cte$. y la derivada de una constante es nula, $a_t = \dfrac{d|\vec{v}|}{dt} = 0$

C6. El momento lineal es el producto de la velocidad por la masa del móvil, $\vec{p} = m\vec{v}$ Si se invierte la velocidad, el momento lineal vale $\vec{p}\,' = -m\vec{v}$

La variación del momento lineal es: $\Delta\vec{p} = \vec{p}\,' - \vec{p} = -m\vec{v} - m\vec{v} = -2m\vec{v}$

C7. El momento angular de una partícula es, $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ y el momento de la fuerza vale $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$.

En el caso de fuerzas centrales la dirección de $\vec{F}$ y $\vec{r}$ es la misma en cada instante, por tanto su producto vectorial es cero, es decir, el momento de la fuerza es cero, resultando:

$$0 = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Cuando una función derivada es cero su primitiva es constante. En este caso el momento angular $\vec{L}$ es constante

■ Ejercicios

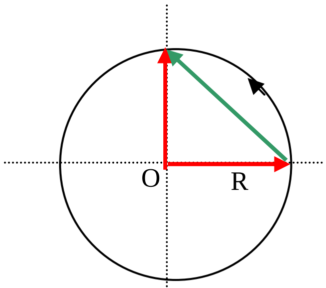


Fig. 1.3

E1. Fig. 1.3

a) La posición inicial, $\vec{r}_1 = R\vec{i}$; la posición final, $\vec{r}_2 = R\vec{j}$, en metros

b) El desplazamiento vectorial es la diferencia entre los vectores de posición Inicial y final

I $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = R\vec{j} - R\vec{i} = -R\vec{i} + R\vec{j}$ metros.

c) La distancia entre las dos posiciones es el módulo del vector desplazamiento:

, $|\Delta\vec{r}| = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}$ m

d) El arco de trayectoria recorrida es la cuarta parte de la longitud de la circunferencia , $\Delta S = 2\pi R / 4 = \pi R / 2$, medida en metros.

E2. El vector de posición es: $\vec{r} = 4t\vec{i} + t^2\vec{j} + 2\vec{k}$

a) La posición en el instante t=1 s es: $\vec{r}(1) = 4\vec{i} + 1\vec{j} + 2\vec{k}$

La posición en el instante t=4 s es: $\vec{r}(4) = 16\vec{i} + 16\vec{j} + 2\vec{k}$

b) El desplazamiento es la diferencia entre los vectores de posición: $\Delta\vec{r} = \vec{r}\,(4) - \vec{r}\,(1)$

$\Delta\vec{r} = 16\vec{i} + 16\vec{j} + 2\vec{k}$ - $(4\vec{i} + 1\vec{j} + 2\vec{k}) = 12\vec{i} + 15\vec{j} + 0\vec{k})$ metros.

c) Velocidad media, $\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{12\vec{i} + 15\vec{j}}{4-1} = 4\vec{i} + 5\vec{j}$ m/s

d) La velocidad instantánea: $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = 4\vec{i} + 2t\vec{j}$

para t = 1 s, $\vec{v}(1) = 4\vec{i} + 2\vec{j}$ m/s,

para t = 4 s, $\vec{v}(4) = 4\vec{i} + 8\vec{j}$ m/s.

e) La aceleración media: $\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = (4\text{-}4)\vec{i} + (8-2)\vec{j} = 6\vec{j}$ m/s^2

f) La aceleración instantánea: $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = 2\vec{j}$ m/s^2

E3. El vector de posición: $\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + \frac{t^3}{3}\vec{j} + \frac{t^2}{2}\vec{k}$

Como en los ejercicios anteriores, Es preciso calcular antes la velocidad instantánea y su módulo en función del tiempo, así como la aceleración.

$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = 2t\vec{i} + t^2\vec{j} + t\vec{k}$ m/s, su módulo $v(t) = \sqrt{4t^2 + t^4 + t^2} = \sqrt{t^4 + 5t^2}$ m/s.

La aceleración: $\vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{v}(t)}{dt} = 2\vec{i} + 2t\vec{j} + \vec{k}$ que tiene por módulo $a(t) = \sqrt{4 + 4t^2 + 1^2}$

la aceleración tangencial es la derivada del módulo del vector velocidad: $a_t(t) = \dfrac{dv(t)}{dt} = \dfrac{4t^3 + 10t}{2\sqrt{t^4 + 5t^2}}$

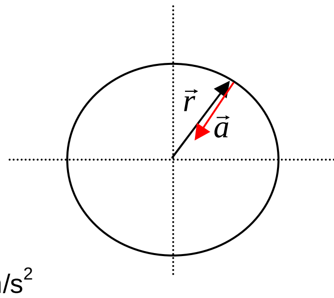
En el instante t = 2 s, tenemos para la aceleración tangencial, $a_t = 4,3\ m/s^2$

En ese mismo instante, el módulo de la aceleración vale $|\vec{a}(2)| = a(2) = \sqrt{4+16+1} = \sqrt{21}$ m/s^2

La aceleración normal tiene de módulo: $a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2}$

La aceleración normal valdrá: $a_n(2) = \sqrt{21 - 4,3^2} = 1,6\, m/s^2$

E4. El vector de posición: $\vec{r}(t) = 10(\cos 2t\ \vec{i} + \text{sen}\ 2t\ \vec{j})$ m



a) El vector velocidad es la derivada respecto al tiempo del vector de posición:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = 10\left(-2sen\,2t\,\vec{i} + 2\cos 2t\ \vec{j}\right) \text{ m/s}$$

b) El vector aceleración es la derivada respecto al tiempo del vector velocidad;

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = 20\left(-2\cos 2t\,\vec{i} - 2sen\,2t\ \vec{j}\right) = -40\left(\cos 2t\,\vec{i} + sen2t\ \vec{j}\right) = -4\vec{r} \text{ m/s}^2$$

El módulo de la velocidad es $|\vec{v}| = 20m/s$ que es constante, por tanto su derivada es cero, en consecuencia la aceleración tangencial es nula. $\vec{a}_t = 0$

La única aceleración que existe es la normal, $\vec{a}(t) = \vec{a}_n = -4\vec{r}\ \ m/s^2$

La aceleración en este caso, tiene la misma dirección que el vector de posición pero sentido contrario.

c) La posición angular es θ(t) = 2t. La velocidad angular es la derivada respecto del tiempo de la posición angular: $\omega = \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{d}{dt}2t = 2\dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$

E5. El vector de posición es: $\vec{r}(t) = 2t\vec{i} + 2t\vec{j} - 2t\vec{k}$

La velocidad vale:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(2t)}{dt}\vec{i} + \frac{d(2t)}{dt}\vec{j} + \frac{d(-2t)}{dt}\vec{k} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k} \text{ m/s}$$

El momento lineal es $\vec{p} = m{\cdot}\vec{v} = 2kg \cdot \left(2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}\right) m\ /s = 4\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}\ \ kg\ m\ /s$

E6.

a) La ley de Newton nos da la ecuación: $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m} = \dfrac{2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}}{0,2} = 10\vec{i} + 15\vec{j} - 5\vec{k}\ m/s^2$

b) Como la fuerza es constante e inicialmente está en reposo, $\vec{v} = \vec{a}.t = \vec{a}\ 0,2s = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ m/s

c) El momento lineal, $\vec{p} = \text{m}{\cdot}\vec{v} = 0,2kg \cdot \vec{v} = 0,4\vec{i} + 0,6\vec{j} - 0,2\vec{k}\ \ kg{\cdot}m/s$

E7. Aplicando el teorema del impulso mecánico:

$$\vec{F}\cdot\Delta t=\vec{p}-\vec{p}_o=m\frac{\vec{v}_o}{2}-m\vec{v}_o=-m\frac{\vec{v}_o}{2}=-\frac{\vec{p}_o}{2}$$

El módulo del momento lineal: $\left|\vec{p}_o\right|=\left|-2\cdot\vec{F}\ \Delta t\right|=2\cdot 0,1N\cdot 0,01s=2.10^{-3}\ kg\ m\ /s$

E8. El vector de posición es: $\vec{r}(t)=2t\vec{i}-t^2\vec{j}$

Derivando $\vec{r}$ (t) respecto del tiempo obtenemos la velocidad: $\vec{v}$ (t)= 2 $\vec{i}$ – 2t $\vec{j}$ m/s

Derivando la velocidad obtenemos la aceleración,

$$\vec{a}\text{ (t)} = -2\ \vec{j}\ \text{m/s}^2$$

La fuerza es la masa por la aceleración; $\vec{F}=m\cdot\vec{a}=0,02\,kg\cdot\left(-2\vec{j}\ m/s^2\right)=-0,04\ \vec{j}\ N$

Para obtener la aceleración tangencial hay que derivar respecto al tiempo el módulo de la velocidad que vale,

$$\left|\vec{v}(t)\right|=\sqrt{4+4t^2}=2\sqrt{1+t^2}$$

y la aceleración tangencial $a_t=\dfrac{d\left|\vec{v}(t)\right|}{dt}=2\cdot\dfrac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}=\dfrac{2t}{\sqrt{1+t^2}}$ m/s^2

La aceleración normal está relacionada con las anteriores por: $a_n=\sqrt{a^2-a_t^2}$

Como $a^2=4$ y $a_t^2=\dfrac{4t^2}{(1+t^2)}$

Resulta para la aceleración normal: $a_n=\sqrt{\dfrac{4(1+t^2)-4t^2}{(1+t^2)}}=\dfrac{2}{\sqrt{1+t^2}}\dfrac{m}{s^2}$

La fuerza tangencial: $F_t=m\cdot a_t=0,02kg\cdot 2\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\ m\ /s^2=\dfrac{0,04t}{\sqrt{1+t^2}}\ N$

La fuerza normal : $F_n=0,02\cdot 2\sqrt{\dfrac{1}{(1+t^2)}}=0,04\sqrt{\dfrac{1}{(1+t^2)}}\ N$

E9. La velocidad angular ω = v/R = 4/0,5 = 8 rad/s.
La posición angular: $\theta=\omega\, t$ = 8 t rad

El vector de posición con origen en el centro de la circunferencia:

$$\vec{r}=0,5\cos 8t\,\vec{i}+0,5sen\,8t\,\vec{j}=0,5\left(\cos 8t\,\vec{i}+sen\,8t\,\vec{j}\right)$$

La velocidad: $\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=-4sen\,8t\,\vec{i}+4\cos 8t\,\vec{j}$

El momento lineal: $\vec{p}=10^{-2}\cdot(-4sen\,8t\,\vec{i}+4\cos 8t\,\vec{j})=4.10^{-2}\left(-sen\,8t\,\vec{i}+\cos 8t\right)\vec{j}$

El momento angular es el producto vectorial $\vec{L}=\vec{r}\wedge\vec{p}$ que se puede calcular con el determinante,

$$\vec{L}=0,5\cdot 4.10^{-2}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \cos 8t & \operatorname{sen} 8t & 0\\ -\operatorname{sen} 8t & \cos 8t & 0\end{vmatrix}=2.10^{-2}(\cos^2 8t+\operatorname{sen}^2 8t)\vec{k}=2.10^{-2}\vec{k}\quad kg.\frac{m^2}{s}$$

El momento de fuerza es la derivada $\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$ = 0 ; por ser $\vec{L}$ constante.

E10. El vector de posición: $\vec{r}\left(t\right) = 3t\vec{i} + t^2\vec{k}$

La velocidad de la partícula es $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = 3\vec{i} + 2t\vec{k}$ *m/s*

El momento lineal, $\vec{p} = m\cdot\vec{v} = 0{,}5\,kg\cdot\vec{v} = 1{,}5\vec{i} + t\vec{k}$ *kg·m/s*

El momento angular vale $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3t & 0 & t^2 \\ 1{,}5 & 0 & t \end{vmatrix} = -\vec{j}(3t^2 - 1{,}5t^2) = -1{,}5t^2\vec{j}$ $kg\cdot m^2/s$

E11. El vector de posición: $\vec{r}\left(t\right) = t\vec{i} - 2t\vec{j} + \vec{k}$; la fuerza: $\vec{F} = 2\vec{i} - 3t\vec{j} + t^2\vec{k}$

La velocidad es $\vec{v}. = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = (\vec{i} - 2\vec{j})$ m/s

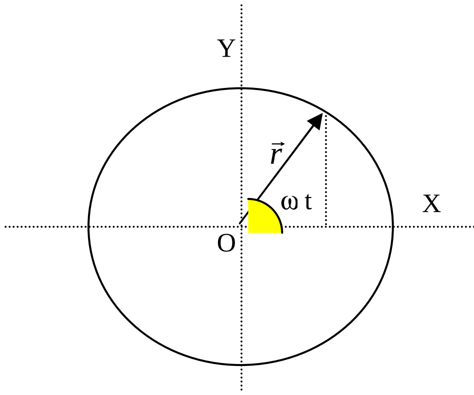
a) La potencia es el producto escalar : $P = \vec{F}\cdot\vec{v} = (2\vec{i} - 3t\vec{j} + t^2\vec{k})\cdot(\vec{i} - 2\vec{j}) = 2 + (-3t)(-2) = 2 + 6t\ \cdot$

b) El trabajo es: $dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = \vec{F}\cdot\left[\dfrac{d\vec{r}}{dt}dt\right] = (2\vec{i} - 3t\vec{j} + t^2\vec{k})\left(\vec{i} - 2\vec{j}\right)dt = \left(2 + 6t\right)dt$

■ Problemas

P1.

a) El vector de posición: $\vec{r}$ (t)= R$(\cos\omega t\vec{i} + \operatorname{sen}\omega t\vec{j})$ m



En nuestro caso los datos son:

R = 100 m; v = 72 km/h = 20 m/s,

por consiguiente. ω= $\dfrac{v}{R} = \dfrac{20}{100} = 0{,}2$ rad/s

El vector de posición: $\vec{r}$ (t)= 100·$(\cos 0{,}2t\vec{i} + \operatorname{sen} 0{,}2t\vec{j})$

El vector velocidad, $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = 20(-\operatorname{sen} 0{,}2t\,\vec{i} + \cos 0{,}2t\,\vec{j})$ m/s

El vector aceleración, $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = -4(\cos 0{,}2t\vec{i} + \operatorname{sen} 0{,}2t\vec{j})$ m/s^2

b) El módulo de la velocidad permanece constante v = 20 m/s, y su derivada es cero, así que no hay aceleración tangencial.

La única aceleración que existe es la normal, $\vec{a}_n = \vec{a} = -4(\cos 0{,}2t\vec{i} + \operatorname{sen} 0{,}2t\vec{j})$

Siendo $\left|\vec{a}_n\right| = 4\,m/s^2$

P2. El momento lineal inicial del sistema que supondremos moviéndose por el eje X, vale:

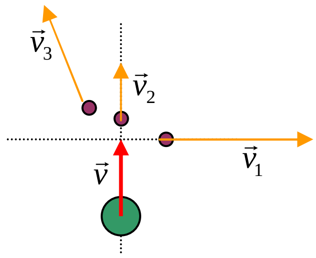
$\vec{p} = 1200\,kg\cdot 10\,\vec{i}\ m/s = 12000\,\vec{i}\ kg\ m/s$

Para el saco al lanzarse por la parte posterior, y su velocidad respecto de la vía vale $-30\vec{i}\ m/s$

El momento lineal se conserva constante porque no hay fuerzas exteriores al sistema vagoneta-saco.

$12000\,\vec{i}\ kg\ m/s = 100\,kg\cdot\left(-30\,\vec{i}\ m/s\right) + \left(1200 - 100\right)kg\cdot\vec{v}'$; $\vec{v}' = 13{,}7\,\vec{i}\ m/s$

P3.



La conservación del momento lineal nos lleva a la ecuación vectorial:

$$m\cdot 300\vec{j} = \frac{m}{3}\cdot 400\vec{i} + \frac{m}{3}\cdot 100\vec{j} + \frac{m}{3}\left(v_{3x}\vec{i} + v_{3y}\vec{j}\right)$$

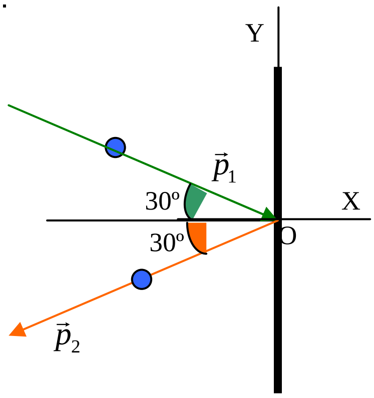
Identificando vectores, tenemos:

Los verticales: $v_{3y}\vec{j} = 900\vec{j} - 100\vec{j};$ $\vec{v}_{3y} = 800\,\vec{j}\; m/s$

Los horizontales: $0 = 400\vec{i} + v_{3x}\vec{i};$ $\vec{v}_{3x} = -400\,\vec{i}\;\; m/s$

$\vec{v}_3 = -400\vec{i} + 800\vec{j}\quad m/s$

P4. Tomando como eje OX la horizontal y eje OY la vertical en el punto de contacto.
El vector velocidad antes del contacto:



$\vec{v}_1 = 2\cos 30\,\vec{i} - 2\,sen\,30\,\vec{j}$

El momento lineal es $\vec{p}_1 = m\cdot\vec{v}_1 = 0,4\cos 30\vec{i} - 0,4sen\,30\,\vec{j}\;\; kg\cdot m\;/s$

La velocidad después del contacto con la pared:

$\vec{v}_2 = -2\cos 30\vec{i} - 2\,sen\,30\,\vec{j}$

Su momento lineal: $\vec{p}_2 = m\vec{v}_2 = -0,4\cos 30\vec{i} - 0,4sen30\,\vec{j}\quad kg\cdot m/s$

a) La variación del momento lineal: $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = -0,8\cos 30\,\vec{i} = -0,69\,\vec{i}\quad kg\cdot m/s$

b) Como se verifica que el impulso mecánico es igual a la variación del momento lineal: $\vec{F}\cdot\Delta t = \Delta\vec{p}$

Queda para el valor de la fuerza sobre la pelota: $\vec{F} = \dfrac{-0,69\,kg\;m/s}{0,05\,s}\vec{i} = -13,9\,\vec{i}\;\; N$

P5. En su trayectoria circular la fuerza centrípeta es la tensión de la cuerda

$$T = \frac{m.v^2}{R} = \frac{10\,kg\cdot 2^2\,m^2/s^2}{20\,m} = 2N$$

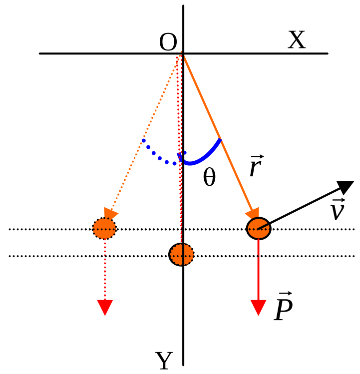
P6. La fuerza centrípeta la ha de dar el rozamiento con el disco. $F_r = m.\omega^2.R$. Por otra parte la fuerza de rozamiento sobre el disco es $F_R = \mu\cdot mg$.

La velocidad angular : $\omega = 60\cdot\dfrac{2\pi}{60} = 2\pi\dfrac{rad}{s}$

Igualando ambas expresiones, $m\cdot\omega^2 R = \mu\cdot mg$ sacamos el valor de R que es la distancia al eje

$$R=\frac{\mu.g}{\omega^2}=\frac{0,8\cdot 9,8}{4\pi^2}=0,2\text{ m}$$

P7. a) El momento del peso es $\vec{M}=\vec{r}\wedge\vec{P}$



Tomamos unos ejes X e Y (éste con sentido positivo hacia abajo).

El momento $\vec{M}$ cambia a cada instante, su dirección es siempre perpendicular al plano de oscilación del péndulo y su sentido se invierte cada vez que el péndulo pasa por la vertical.

Si es r la longitud del hilo, resulta para el vector de posición:

$$\vec{r}=r\,sen\,\theta\,\vec{i}+r\cos\theta\,\vec{j}\,; \qquad \vec{F}=\vec{P}=mg\,\vec{j}$$

$$\vec{M}=\vec{r}\wedge\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ r\,sen\,\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & mg & 0\end{vmatrix}=rmg\,sen\,\theta\,\vec{k}$$

$$\vec{L}=\vec{r}\wedge m\vec{v}\,; \qquad \vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=r\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{i}-r\dot{\theta}\,sen\,\theta\,\vec{j} \qquad \text{con} \qquad \dot{\theta}=\frac{d\theta}{dt}$$

$$\vec{L}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ r\,sen\,\theta & r\cos\theta & 0\\ mr\dot{\theta}\cos\theta & -mr\dot{\theta}sen\,\theta & 0\end{vmatrix}=-\left(mr^2\dot{\theta}sen^2\theta+mr^2\dot{\theta}\cos^2\theta\right)\vec{k}=-mr^2\dot{\theta}\,\vec{k}$$

b) Cuando pasa por la vertical es $\theta=0$ y particularizando en las ecuaciones:

$$\vec{M}=rmg\,sen\,\theta\,\vec{k}=rmg\,sen\,0\,\vec{k}=0$$

$$\vec{L}=-mr^2\dot{\theta}\,\vec{k}$$

$\dot{\theta}$ en la vertical va a depender del ángulo máximo que se separa inicialmente el hilo del eje Y. Suponiendo que se separa una valor θ_o resulta del principio de la conservación de la energía mecánica:

$$mgr(1-\cos\theta_o)=\frac{1}{2}mv^2\,; \qquad v=\sqrt{2gr(1-\cos\theta_o)}\,; \qquad \dot{\theta}=\omega=\frac{v}{r}=\sqrt{\frac{2g(1-\cos\theta_o)}{r}}$$

$$\vec{L}=-mr^2\dot{\theta}\,\vec{k}=-mr^2\sqrt{\frac{2g(1-\cos\theta_o)}{r}}\,\vec{k}=-m\sqrt{2gr^3(1-\cos\theta_o)}\,\vec{k}$$

P8. En el punto mas alto de la circunferencia el peso del cuerpo $P = mg$ está en la dirección radial y proporciona la fuerza centrípeta.

$$= mg=\frac{mv^2}{R}$$

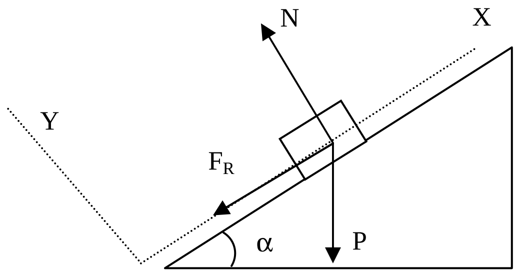
despejamos la velocidad y obtenemos, $v=\sqrt{Rg}$ m/s

P9. La energía cinética del patinador es $E_c = \frac{1}{2} m.v^2$. Esta energía se convierte en trabajo contra la fuerza de rozamiento hasta que llega a parase después de recorrer la distancia d,

$$\text{mg.}\mu\text{. d} = \frac{1}{2} m.v^2$$

de aquí la distancia recorrida vale, $d = \frac{v^2}{2g\mu} = \frac{64}{2\cdot 9,8\cdot 0,1} = 32,7\,m$

P10.



a) Aplicando la ecuación de la Dinámica y descomponiendo las fuerzas según los ejes señalados en la figura:

$$-P sen\alpha - F_R = m\cdot a$$
$$N - P\cos\alpha = 0$$

$sen\alpha = \frac{4}{5} = 0,8$; $\cos\alpha = 0,6$ α=53,1º

$$F_R = \mu\cdot N = \mu\cdot mg\ \cos\alpha$$

$$a = -\frac{mg\ sen\alpha + \mu\, mg\cos\alpha}{m} = -9,8\frac{m}{s^2}(0,8 + 0,3\cdot 0.6) = -9,6 m/s^2$$

b) Aplicando la ecuación de la energía:

$$W_P + W_{F_R} + W_N = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_o^2 = 0 - \frac{1}{2}mv_o^2$$

$$P\cdot\Delta r\ \cos\left(90+\alpha\right) + F_R\cdot\Delta r\ \cos 180 + N\ \cdot\Delta r\ \cos 90 = -\frac{1}{2}mv_o^2$$

$$\Delta r = \frac{-\frac{1}{2}mv_o^2}{P\cos(90+53,1) + F_R\cos 180} = \frac{-v_o^2}{2\left[g\cos 143,1 + \mu g\cos 53,1\cdot(-1)\right]} = 3,3\,m$$

La altura que alcanza vale: $\Delta h = 3,33\,m\ \cdot sen\, 53.1 = 2,7\,m$

c) Aplicando de nuevo la ecuación de la energía, pero teniendo en cuenta que la fuerza de rozamiento al oponerse al movimiento va ahora con sentido hacia arriba, resulta:

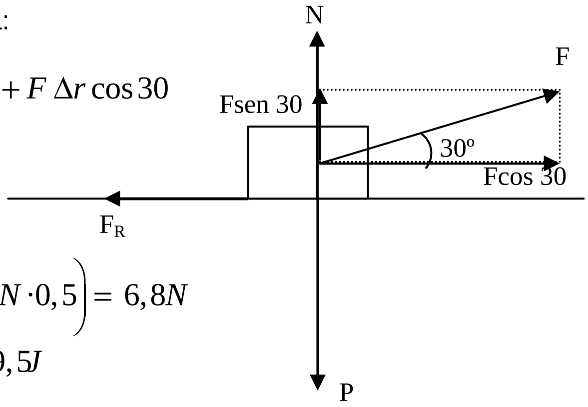
$$W_P + W_{F_R} + W_N = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_o^2 = \frac{1}{2}mv^2 - 0$$

$$P\cdot\Delta r\ \cos\left(90-\alpha\right) + F_R\cdot\Delta r\ \cos 180 = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{2\left(g\Delta r\cos(90-\alpha) + \mu g\Delta r\cos 180\right)} = \sqrt{2g\Delta r\left(\cos(90-\alpha) + \mu\cos 180\right)}$$

$$v = 5,7\frac{m}{s}$$

P11. Las fuerzas que actúan se representan en el diagrama:



a) $W = W_P + W_{F_R} + W_N + W_F = 0 + F_R\,\Delta r\cos 180 + 0 + F\,\Delta r\cos 30$

Cálculo de la Fuerza de rozamiento:

$$N + Fsen30 - P = 0; \quad N = P - F\,sen30$$

$$F_R = \mu N = \mu\left(P - F\,sen30\right) = 0,2\left(5kg \cdot 9,8\frac{m}{s^2} - 30N \cdot 0,5\right) = 6,8N$$

$$W = 6,8\,N \cdot 25m \cdot \cos 180 + 30N \cdot 25m\ \cos\ 30 = 479,5J$$

b) Según la ecuación de la energía $W = \Delta E_c = E_c - E_{c,o} = E_c - 0 = E_c$ Como inicialmente estaba parado, la energía cinética adquirida es igual al trabajo realizado por todas las fuerzas.

$$E_c = 479,5\,J$$

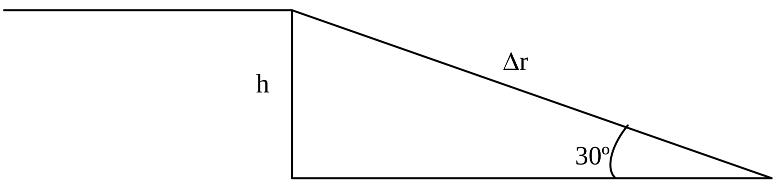
c) $v = \sqrt{\dfrac{2\,E_c}{m}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 479,5J}{5kg}} = 13,8\dfrac{m}{s}$

P12. Como no hay rozamiento la única fuerza que actúa realizando trabajo es el peso del bloque que es una fuerza conservativa. En consecuencia se puede aplicar el principio de conservación de la energía mecánica, el bloque asciende hasta que toda la energía cinética se haya transformado en potencial.

$$\frac{1}{2}mv^2 = m\,g\,h\,; \qquad h = \frac{v^2}{2g} = \frac{\left[10m/s\right]^2}{2 \cdot 9,8/s^2} = 5,1m$$

En cuanto a la distancia que asciende a lo largo del plano es $\Delta r = \dfrac{h}{sen\,\theta}$

P13 Por no haber rozamiento se cumple el principio de conservación de la energía mecánica.



$$h = \Delta r \cdot sen30 = 6\,m \cdot sen30 = 3$$

Al despreciarse el rozamiento la única fuerza que efectúa trabajo es el peso que forma con el desplazamiento Δr, un ángulo de (90º-30º)= 60º

$$W_P = E_c - \frac{1}{2}mv_o^2; \qquad P \cdot \Delta r\ \cos 60 = E_c - \frac{1}{2}mv_o^2\,; \qquad E_c = P \cdot \Delta r\ \cos 60 + \frac{1}{2}mv_o^2$$

$$E_c = 2\,kg \cdot 6\,m \cdot \cos 60º + \frac{1}{2}2\,kg \cdot \left(\frac{4\,m}{s}\right)^2 = 22\,J$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 22\,J}{2\,kg}} = 4,7\,m/s$$

P14. a) La energía cinética a la salida es solo cinética $E_{c,o} = \frac{1}{2} 10kg \cdot \left[100 \frac{m}{s} \right]^2 = 5.10^4\ J$

b) Debemos determinar 2 s después del lanzamiento, la altura del proyectil así como su velocidad, para lo que resulta necesario escribir sus ecuaciones del movimiento.

$$\begin{cases} y = (100\, sen\, 30)\, t - \frac{1}{2} 9,8 t^2 = 50t - 4,9t^2 \\ x = (100 \cos 30)\, t \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_y = 100 sen 30 - 9,8t \\ v_x = 100 \cos 30 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_y(2s) = 50 - 9,8 \cdot 2 = 30,4 m/s \\ v_x(2s) = 86,6\, m/s \end{cases}$$

Particularizando también para *t = 2s*

$$y = (100\, sen\, 30)\, 2 - \frac{1}{2} 9,8 \cdot 2^2 = 80,4m \qquad E_p = m \cdot g \cdot y\,(2s) = 10kg \cdot 9,8 \frac{m}{s^2} \cdot 80,4m = 7879,2J$$

Se calcula ahora la energía cinética en el mismo instante:

$$E_c(2\,s) = \frac{1}{2} m \left(v_x^2(2s) + v_y^2(2s) \right) = \frac{1}{2} 10kg \left(86,6^2 \frac{m^2}{s^2} + 30,4^2 \frac{m^2}{s^2} \right) = 42118,6\, J$$

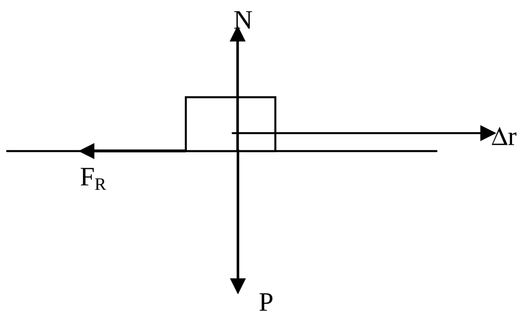
c) La comprobación de la conservación de la energía mecánica requiere sumar la energía cinética con la potencial a los 2 s y compararla con la energía cinética en el instante inicial.

$$E_m(2s) = 7879,2\, J + 42118,6\, J = 49997,8\, J$$

No sale exactamente 5.10^4 J debido a los errores acumulados en las operaciones con la calculadora.

P15. a) El diagrama de fuerzas aparece en la figura:

Determinaremos la aceleración contraria al Movimiento, producida por la fuerza de rozamiento.



$$a = -\frac{F_R}{m} = -\frac{\mu N}{m} = -\frac{\mu m g}{m}$$

$$a = -\mu g = -0,1 \cdot 9,8 \frac{m}{s^2} = -0,98 \frac{m}{s^2}$$

$$v^2 - v_o^2 = 2a \cdot \Delta r\ ; \quad v = \sqrt{10^2 - 2 \cdot 0,98 \cdot 5} = 9,5m\ /s$$

$$E_{c,A} = \frac{1}{2} 4kg \cdot \left(10 \frac{m}{s} \right)^2 = 200J\ ; \quad E_{c,B} = \frac{1}{2} 4kg \left(9,5 \frac{m}{s} \right)^2 = 180,4J$$

b) $W_{F_R} = F_R \cdot \Delta r \cos 180 = 0,1 \cdot 4kg \cdot 9,8 \frac{m}{s^2} \cos 180 \cdot 5m = -19,6J$

$$\Delta E_c = E_{c,B} - E_{c,A} = 180,4\, J - 200 J = -19,6\, J$$

Hay plena coincidencia