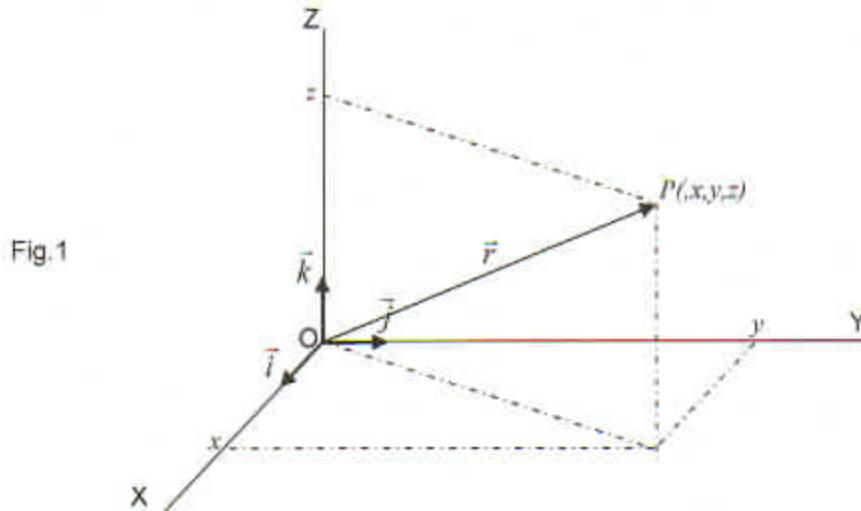


SISTEMAS DE COORDENADAS ORTOGONALES

Sistema rectangular

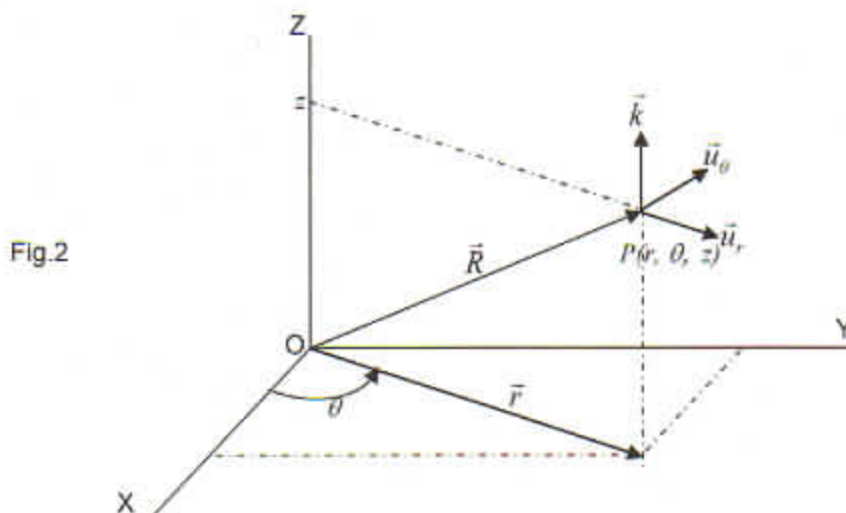
Se explica respecto de tres ejes perpendiculares entre sí (X,Y,Z) que se cortan formando un triedro y sobre los que están definidos tres vectores unitarios principales $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, que se toman de modo que el triedro resulte a derechas, lo que se deduce de la regla $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$. La posición de un punto P fig.1, viene determinada por tres coordenadas (x, y, z) , es decir mediante tres distancias al punto O.



El vector de posición de un punto P viene determinado por $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Sistema de coordenadas cilíndricas

La posición de un punto respecto del sistema de ejes viene determinada por dos distancias y un ángulo (r, θ, z) y los vectores unitarios son: $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k}$, ver la fig 2



El vector unitario \vec{k} , se aplica en el punto P y es paralelo al eje Z.

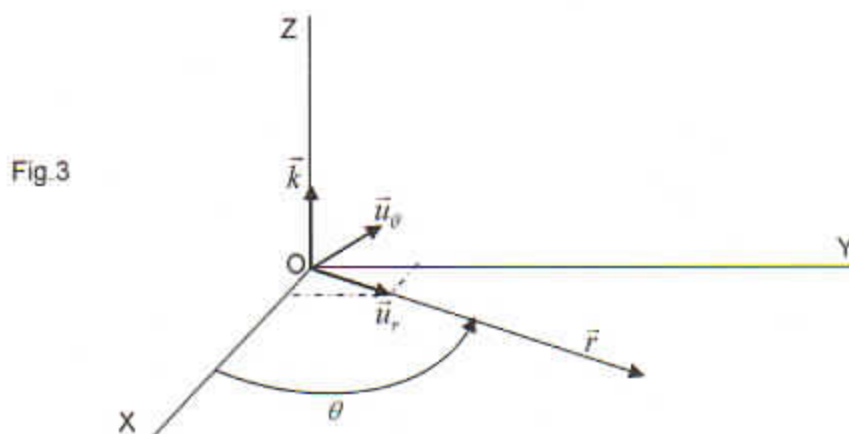
El vector unitario \vec{u}_r se aplica en P y es paralelo al vector \vec{r} dibujado en el plano (X,Y), estando determinado por la proyección de P sobre el citado plano.

El vector unitario \vec{u}_θ se aplica en P y es perpendicular a los otros dos verificando $\vec{k} \wedge \vec{u}_r = \vec{u}_\theta$

El vector de posición de un punto P viene determinado por $\vec{R} = r\vec{u}_r + z\vec{k}$ no quedando unívocamente determinado.

Relación de los sistemas de coordenadas cilíndricas y rectangulares

Se buscarán relaciones de \vec{u}_r y \vec{u}_θ con los unitarios \vec{i}, \vec{j} pues el unitario \vec{k} coincide. Traslado \vec{u}_r y \vec{u}_θ al plano (X, Y) fig.3, resulta:



Los vectores \vec{u}_r y \vec{u}_θ son unitarios: $|\vec{u}_r| = |\vec{u}_\theta| = 1$

$$\vec{u}_r = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$$

$$\vec{u}_\theta = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\vec{j} = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$$

$$\vec{k} = \vec{k}$$

Aplicación:

- Un punto tiene de coordenadas cartesianas $P(4, 3, 2)$ expresar su vector de posición en coordenadas cilíndricas.

$$|\vec{r}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5; \quad \vec{R} = r\vec{u}_r + z\vec{k} = 5\vec{u}_r + 2\vec{k}$$

- Expresar un vector $\vec{a} = -8\vec{i} + 10\vec{j} - 12\vec{k}$ en coordenadas cilíndricas, si su punto de aplicación está en $P(4, 3, 2)$

De la fig.3 se deduce fácilmente que $\cos\theta = \frac{4}{5} = 0,8$; $\sin\theta = \frac{3}{5} = 0,6$

$$\vec{u}_r = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j} = 0,8\vec{i} + 0,6\vec{j}$$

$$\vec{u}_\theta = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j} = -0,6\vec{i} + 0,8\vec{j}$$

El vector de posición del punto de aplicación del vector \vec{a} que está en P que ya se calculó en la aplicación anterior: $\vec{R} = 5\vec{u}_r + 2\vec{k}$

Para expresar el vector \vec{a} en coordenadas cilíndricas, hemos de calcular sus componentes en las direcciones de los vectores unitarios, \vec{u}_r ; \vec{u}_θ ; \vec{k} ; para lo cual vamos a calcular los productos escalares de \vec{a} por cada uno de estos unitarios, porque el producto escalar de un vector por otro unitario, proporciona la proyección del vector sobre la dirección del unitario.

$$\vec{a} \cdot \vec{u}_r = (-8\vec{i} + 10\vec{j} - 12\vec{k}) \cdot (0,8\vec{i} + 0,6\vec{j}) = -6,4 + 6 = -0,4$$

$$\vec{a} \cdot \vec{u}_\theta = (-8\vec{i} + 10\vec{j} - 12\vec{k}) \cdot (-0,6\vec{i} + 0,8\vec{j}) = 4,8 + 8 = 12,8$$

$$\vec{a} \cdot \vec{k} = (-8\vec{i} + 10\vec{j} - 12\vec{k}) \cdot \vec{k} = 4,8 + 8 = -12$$

$$\vec{a} = -0,4\vec{u}_r + 12,8\vec{u}_\theta - 12\vec{k}$$

Compruebe que el módulo del vector es el mismo con independencia del sistema de coordenadas en el que se exprese, $|\vec{a}| = \sqrt{308}$

Sistema de coordenadas esféricas

La posición de un punto P respecto del sistema de ejes, viene determinada por una distancia y dos ángulos (r, θ, φ) y los vectores unitarios son: \vec{u}_r ; \vec{u}_θ ; \vec{u}_φ , ver la fig.4.

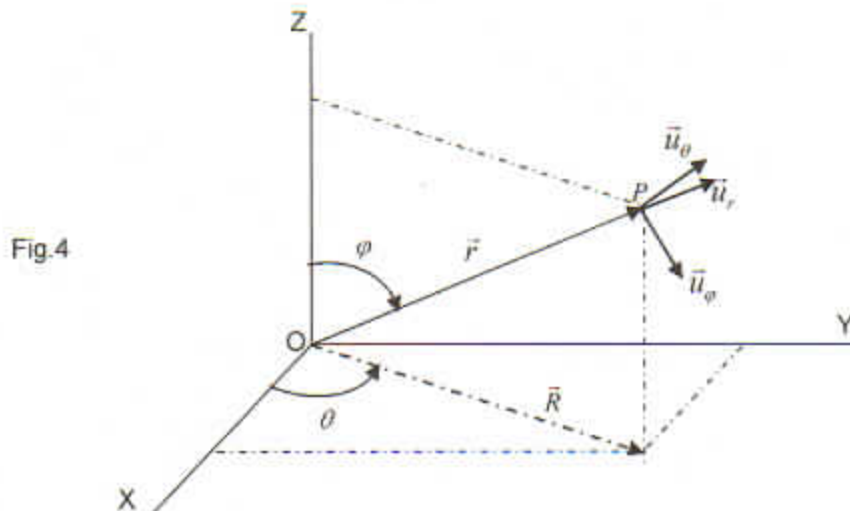


Fig.4

El vector unitario \vec{u}_r está en la dirección $\overline{OP} = \vec{r}$

El vector unitario \vec{u}_θ es perpendicular a \vec{u}_r , y su sentido es aquel en el que φ crece.

El vector unitario \vec{u}_φ es perpendicular a los dos anteriores verificando $\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta = \vec{u}_\varphi$

Un punto cualquiera como P , tiene un vector de posición que se encuentra en la dirección OP . En coordenadas esféricas se expresa:

$$\vec{r} = r \vec{u}_r$$

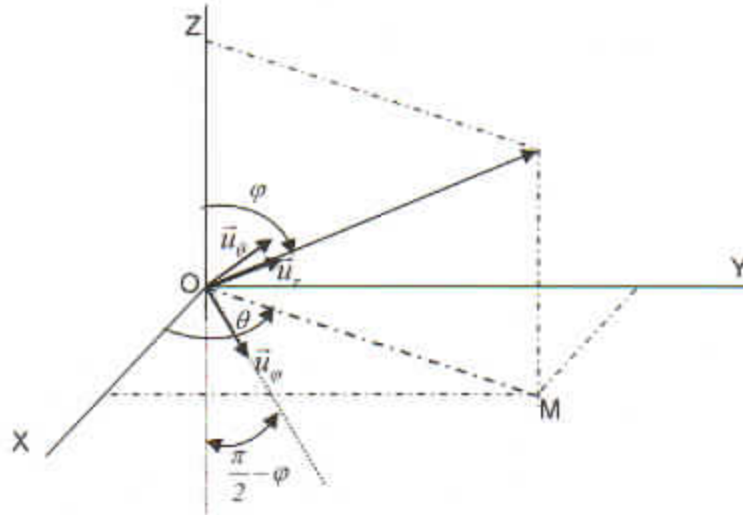
Indica únicamente que P está a una distancia r del origen, pero no determina unívocamente su posición.

Relación de los sistemas de coordenadas esféricas y rectangulares

Se buscarán relaciones entre los vectores unitarios: \vec{u}_r , \vec{u}_θ , \vec{u}_φ y los \vec{i} , \vec{j} , \vec{k}

Trasladamos los vectores unitarios al origen para mayor facilidad.

Fig.5



El vector \vec{u}_r debe proyectarse previamente sobre el plano (X, Y), dirección OM, antes de hacerlo sobre los ejes X e Y, esta proyección vale $|\vec{u}_r| \cdot \text{sen } \varphi = 1 \cdot \text{sen } \varphi = \text{sen } \varphi$. Para proyectar \vec{u}_r observamos que forma con el Z un ángulo $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ pero también debe ser proyectado antes sobre el plano (X, Y) y después sobre los ejes.

Para proyectar \vec{u}_θ observamos que forma con el eje X, un ángulo $\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\vec{u}_r = \text{sen } \varphi \cdot \cos \theta \vec{i} + \text{sen } \varphi \cdot \text{sen } \theta \vec{j} + \cos \varphi \vec{k}$$

$$\vec{u}_\theta = \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \cos \theta \vec{i} + \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \text{sen } \theta \vec{j} - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \vec{k} = \cos \varphi \cdot \cos \theta \vec{i} + \cos \varphi \cdot \text{sen } \theta \vec{j} - \text{sen } \varphi \vec{k}$$

$$\vec{u}_\phi = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \vec{i} + \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} = -\text{sen } \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$$

Aplicación

- Un punto tiene de coordenadas cartesianas $P(4, 3, 2)$ expresar su vector de posición en coordenadas esféricas.

$$|\vec{r}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{29}; \quad \vec{r} = r \vec{u}_r = \sqrt{29} \vec{u}_r$$

Vamos ahora a obtener los vectores unitarios \vec{u}_r , \vec{u}_θ , \vec{u}_ϕ en función de \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} . Es necesario observar en la fig.4, el vector designado por \vec{R} .

$$|\vec{R}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \quad \cos \theta = \frac{4}{5} = 0,8 \quad \text{sen } \theta = \frac{3}{5} = 0,6 \quad \cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{29}} \quad \text{sen } \varphi = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

$$\vec{u}_r = \frac{5}{\sqrt{29}} \cdot 0,8 \vec{i} + \frac{5}{\sqrt{29}} \cdot 0,6 \vec{j} + \frac{2}{\sqrt{29}} \vec{k} = \frac{1}{\sqrt{29}} (4\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k})$$

$$\vec{u}_\theta = \frac{2}{\sqrt{29}} \cdot 0,8 \vec{i} + \frac{2}{\sqrt{29}} \cdot 0,6 \vec{j} - \frac{5}{\sqrt{29}} \vec{k} = \frac{1,6}{\sqrt{29}} \vec{i} + \frac{1,2}{\sqrt{29}} \vec{j} - \frac{5}{\sqrt{29}} \vec{k} = \frac{1}{\sqrt{29}} (1,6\vec{i} + 1,2\vec{j} - 5\vec{k})$$

$$\vec{u}_\phi = -0,6\vec{i} + 0,8\vec{j}$$

- Expresar un vector $\vec{a} = -8\vec{i} + 10\vec{j} - 12\vec{k}$ en coordenadas esféricas, si su punto de aplicación está en $P(4, 3, 2)$.

Calcularemos las componentes del vector \vec{a} en las direcciones de los vectores unitarios $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi$, multiplicando escalarmente el vector \vec{a} , por cada uno de estos unitarios.

$$\vec{a} \cdot \vec{u}_r = (-8\vec{i} + 10\vec{j} - 12\vec{k}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{29}} (4\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}) \right) = \frac{1}{\sqrt{29}} (-32 + 30 - 24) = \frac{-26}{\sqrt{29}}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{u}_\phi = (-8\vec{i} + 10\vec{j} - 12\vec{k}) \cdot \frac{1}{\sqrt{29}} (1,6\vec{i} + 1,2\vec{j} - 5\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{29}} (-12,8 + 12 + 60) = \frac{59,2}{\sqrt{29}}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{u}_\theta = (-8\vec{i} + 10\vec{j} - 12\vec{k}) \cdot (-0,6\vec{i} + 0,8\vec{j}) = 4,8 + 8 = 12,8$$

$$\vec{a} = \frac{-26}{\sqrt{29}} \vec{u}_r + \frac{59,2}{\sqrt{29}} \vec{u}_\phi + 12,8 \vec{u}_\theta$$

EXPRESIÓN DE UN VECTOR ELEMENTAL $d\vec{l}$ EN DISTINTOS SISTEMAS DE REFERENCIA

La utilidad que proporciona en Física el vector $d\vec{l}$ es muy grande, pues permite calcular magnitudes como el trabajo, el potencial, etc. y en general interviene en todos aquellos casos en los que hay que resolver una integral de línea.

Sistema rectangular

Si un vector $d\vec{l}$ tiene su origen en el punto de coordenadas (x, y, z) y el extremo en el punto $(x+dx, y+dy, z+dz)$, entonces se observa en la fig. 6 que el vector se expresa:

$$d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

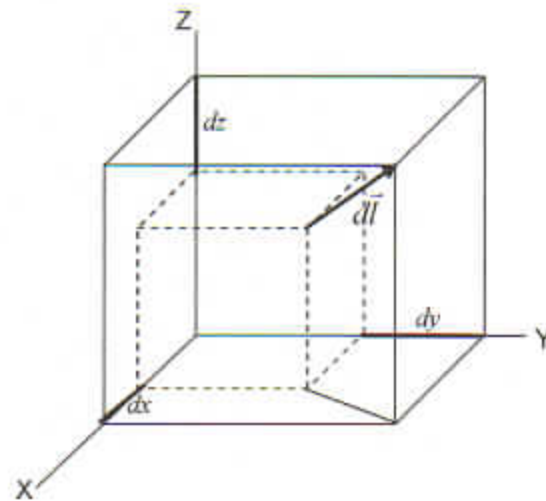


Fig. 6

Sistema de coordenadas cilíndricas

Si un vector tiene su origen en un punto A de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) y su extremo en un punto próximo D , de coordenadas $(r+dr, \theta+d\theta, z+dz)$ vamos a calcular la expresión de un vector elemental $d\vec{l}$ en el sistema de coordenadas cuyos vectores unitarios principales son $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k}$. El vector elemental $d\vec{l}$ se descompone en un vector \vec{AC} en el plano (X, Y) , que es su proyección sobre el plano y en otro vector según Z , designado como $dz\vec{k}$, fig.7.

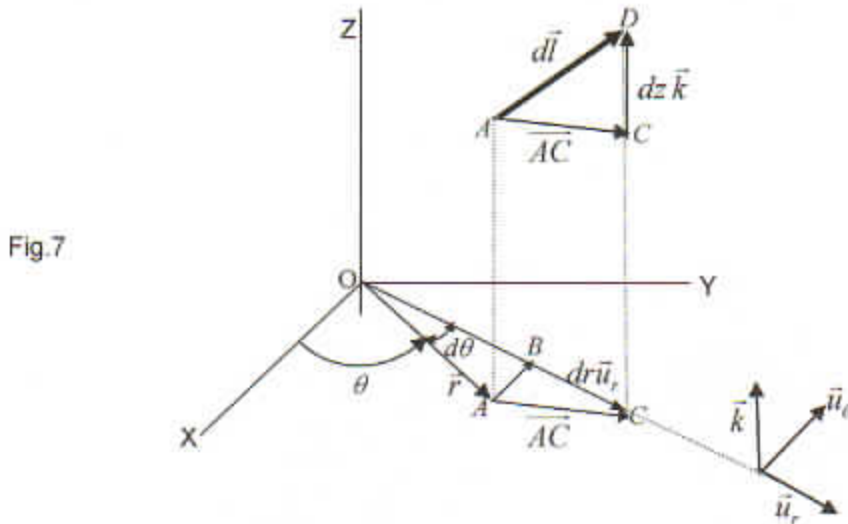


Fig.7

Observamos en la fig.7, que el vector $\vec{OA} = \vec{r}$ y que el vector $\vec{BC} = dr\vec{u}_r$, además, del triángulo ABC se deduce que $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = r \cdot d\theta \vec{u}_\theta + dr\vec{u}_r$. En consecuencia el vector $d\vec{l}$ puede expresarse como suma de los vectores $\vec{AC} + \vec{CD}$ del siguiente modo:

$$d\vec{l} = dr\vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz\vec{k}$$

Que constituye la expresión de un vector elemental en coordenadas cilíndricas.

Sistema de coordenadas esféricas

Sea un vector expresado en coordenadas esféricas, cuyo origen está en el punto $A(r, \theta, \varphi)$ y extremo en un punto $B(r+dr, \theta+d\theta, \varphi+d\varphi)$. Queremos expresar un vector $d\vec{l}$ en función de los vectores unitarios $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi$

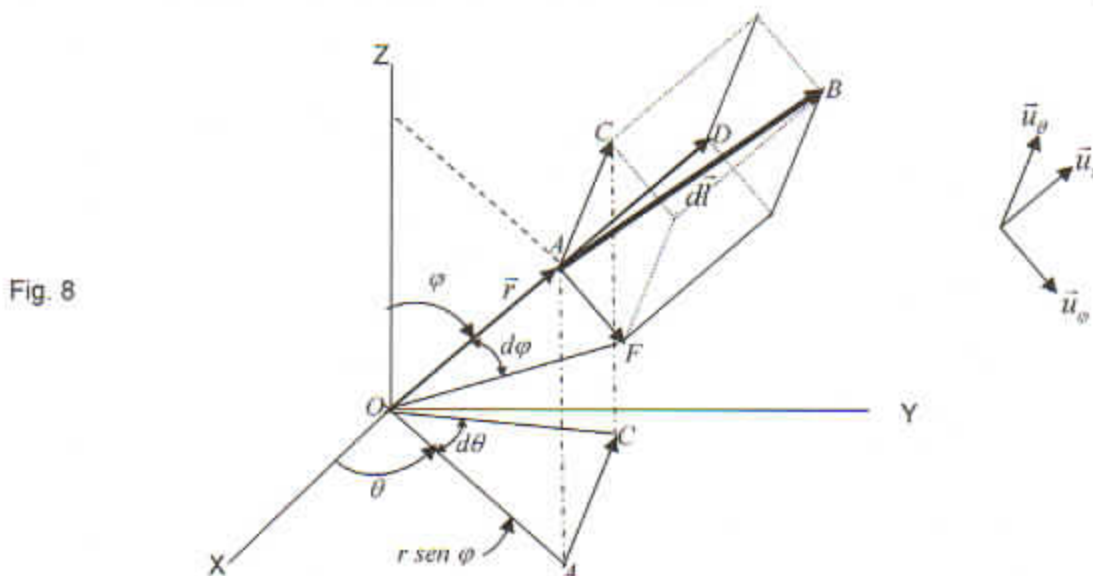


Fig. 8

En fig.8 se puede observar como el vector $d\vec{l} = \overline{AB}$ se descompone en la suma de tres vectores ortogonales \overline{AF} , \overline{AD} , \overline{AC} , cuyos módulos son respectivamente:

$$\begin{aligned} |\overline{AF}| &= r \cdot d\varphi & |\overline{AD}| &= dr & |\overline{AC}| &= r \cdot \text{sen } \varphi \cdot d\theta \\ \overline{AB} &= \overline{AD} + \overline{AC} + \overline{AF} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las direcciones de los vectores unitarios resulta:

$$d\vec{l} = dr \vec{u}_r + r \text{sen } \varphi d\theta \vec{u}_\theta + r d\varphi \vec{u}_\varphi$$

Que constituye la expresión de un vector elemental en coordenadas esféricas.

APLICACIÓN

- **Expresión del gradiente en coordenadas rectangulares**

La diferencial total de una función escalar V en coordenadas rectangulares es.

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

Pero en función del gradiente: $dV = \overline{\text{grad}} V \cdot d\vec{l}$

Sustituyendo dV y $d\vec{l}$ en coordenadas rectangulares resulta:

$$\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \overline{\text{grad}} V \cdot (dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k})$$

Identificando los dos miembros y puesto que hay un producto escalar de vectores:

$$\overline{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}$$

De la ecuación anterior se deduce que el operador nabla en coordenadas rectangulares es:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

- **Expresión del gradiente en coordenadas cilíndricas**

La diferencial total de una función escalar V en coordenadas cilíndricas es.

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

Pero en función del gradiente: $dV = \overline{\text{grad}} V \cdot d\vec{l}$

Sustituyendo dV y $d\vec{l}$ en coordenadas cilíndricas resulta:

$$\frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \overline{\text{grad}} V \cdot (dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{k})$$

Identificando los dos miembros y puesto que hay un producto escalar de vectores:

$$\overline{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}$$

De la ecuación anterior se deduce que el operador nabla en cilíndricas es:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

- **Expresión del gradiente en coordenadas esféricas**

La diferencial total de una función escalar V en coordenadas esféricas es:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial V}{\partial \varphi} d\varphi$$

Pero en función del gradiente: $dV = \overline{\text{grad}} V \cdot d\vec{l}$

Sustituyendo dV y $d\vec{l}$ en coordenadas esféricas resulta:

$$\frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial V}{\partial \varphi} d\varphi = \overline{\text{grad}} V \cdot (dr \vec{u}_r + r \sin \varphi d\theta \vec{u}_\theta + r d\varphi \vec{u}_\varphi)$$

Identificando los dos miembros y puesto que hay un producto escalar de vectores:

$$\overline{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$$

De la ecuación anterior se deduce que el operador nabla en esféricas es:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$$