EL CAMPO ELECTROSTÁTICO

AURORA

BOREAL

Aurora era la diosa romana del atardecer, y el término “aurora borealis” fue acuñado por Galileo en 1621 para describir las asombrosas “luces del norte”. Bayard Taylor, poeta norteamericano, expresó de manera incomparable la belleza caprichosa de una aurora boreal.

Aunque sus causas están ya bastante bien explicadas, la aurora boreal permaneció durante muchos siglos entre las curiosidades científicas. La magnetosfera actúa como un inmenso tubo de rayos catódicos canalizando las partículas solares (cargadas eléctricamente) en chorros dirigidos a las regiones polares. Algunas logran penetrar a través de los huecos del campo, entrando en la atmósfera superior y produciendo auroras boreales y australes simultáneamente.

A finales del siglo XVIII las técnicas de la ciencia experimental consiguieron observaciones y medidas refinadas de las fuerzas entre cargas eléctricas. Los resultados de estas observaciones que eran extremadamente discutidas en aquella época se resumían en tres principios: a) Hay dos clases de cargas. b) Cargas puntuales ejercen entre sí fuerzas según la línea que las une e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. c) Éstas fuerzas son proporcionales al producto de las cargas. Los dos primeros principios junto con el primero como preámbulo se conoce como *ley de Coulomb* en honor a Charles Agustin de Coulomb (1736-1806), quien fue uno de los destacados estudiantIosos de electricidad del siglo XVIII.

La electrostática es el estudio de los campos eléctricos estacionarios y los efectos que éstos producen sobre las cargas, en materiales conductores y dieléctricos, así como sobre la corriente eléctrica debido a campos estáticos en el interior de los conductores.

6.1 Campo y potencial eléctrico.

6.1.1 OBSERVACIONES EXPERIMENTALES.

Aunque la primera experiencia acerca de la electrización de objetos por frotamiento se pierde en la antigüedad, es una experiencia común que al frotar un bolígrafo con un trozo de lana, adquiere la capacidad de atraer pequeños trozos de papel, fig.6.1. Se dice que el bolígrafo se ha electrizado (también la lana lo ha hecho pero con electricidad de signo contrario). La misma experiencia puede repetirse frotando una barra de vidrio con un trozo de seda, el vidrio se electriza, aunque el tipo de electricidad estática que adquieren el vidrio y el plástico son de diferente naturaleza. La interacción eléctrica que tiene lugar entre objetos electrizados es análoga a la interacción gravitatoria pero mucho más intensa y con una característica que la hace muy especial (puede ser de atracción o de repulsión). Para describir la interacción hay que hablar de dos tipos de cargas, una positiva y otra negativa. Las fuerzas de atracción tienen lugar entre cargas de signo opuesto mientras que las de repulsión ocurren entre las cargas del mismo signo.

Hay numerosos efectos producidos por la electricidad estática. La ropa que se lleva puesta, a veces se electriza, pegándose y crujiendo cuando se quita, incluso produciendo chispas. El polvo es atraído por las pantallas de TV, etc. Los filtros electrostáticos se usan para extraer las cenizas y el polvo de los humos que se liberan a la atmósfera, en las chimeneas. También, en los pulverizadores electrostáticos se cargan las gotitas de pintura al atravesar la boquilla y de esta manera el objeto pulverizado se cubre con una capa uniforme de pintura.

Un conjunto de cargas positivas se repelerán con una gran fuerza y como consecuencia se esparcirá en todas las direcciones y exactamente lo mismo le ocurrirá a un conjunto de cargas negativas. Sin embargo, una mezcla de cargas positivas y negativas se comportará de una manera muy diferente. Los elementos opuestos se mantendrán juntos debido a las fuerzas de atracción y el resultado neto será una mezcla de elementos positivos y negativos mezclados íntimamente entre sí, con una carga neta prácticamente nula.

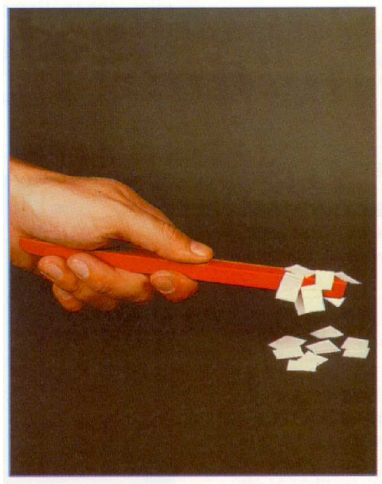


Fig.6.1

Cuando se frota un bolígrafo de plástico con un paño, éste atrae pequeños trozos de papel.

6.1.2 INTERACCIÓN ELÉCTRICA. CARGA ELÉCTRICA.

La interacción eléctrica necesita para su descripción, a diferencia de la interacción gravitatoria, dos tipos de partículas o cargas (positivas y negativas). Experimentalmente se encuentra que dichas cargas tienen las siguientes propiedades:

- La carga está ***cuantizada***, es decir se encuentra en unidades discretas o múltiplos de esta. Las cargas del protón y el electrón son las unidades básicas e iguales en valor absoluto. Al protón se le asigna el valor positivo y al electrón el valor negativo. Como unidad de carga eléctrica en el S.I. se usa el ***culombio,*** *C*. La carga de un electrón es igual a $-1{,}6.10^{-19}$ C. Para tener una carga de *–1 C* son necesarios $6{,}24.10^{18}$ electrones.
- La carga total de un sistema físico es la ***suma algebraica*** de todas las cargas que hay en el interior de dicho sistema. Las positivas tratarán de unirse con las negativas para formar objetos con carga neta nula, por ejemplo los átomos: el núcleo con carga positiva rodeado de electrones con carga negativa formando un todo neutro.
- La carga total de un sistema cerrado ***se conserva*** en cualquier proceso físico (principio de conservación de la carga eléctrica).

6.1.3 LEY DE COULOMB.

La fuerza eléctrica entre dos partículas en el vacío con cargas q_1 y q_2, que están en reposo o moviéndose con velocidades pequeñas comparadas con la de la luz, es directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa. Dicha fuerza tiene la dirección de la recta que une las dos partículas y es de repulsión o atracción para cargas de igual signo o de signo contrario respectivamente. Su expresión matemática es:

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1\, q_2}{4\pi\varepsilon_0\, r_{12}^2}\,\vec{u}_{12} \qquad (6.1)$$

Charles-Agustin Coulomb. Físico francés, nació en 1736 en Angoulem Francia) y murió en París en 1806. En 1785 publico los resultados de una investigación experimental que daban la correcta descripción cuantitativa de la llamada "interacción de Coulomb".

siendo $\vec{F}_{12}$ la fuerza que la partícula q_1 ejerce sobre la q_2, y $\vec{u}_{12}$ un vector unitario con la dirección y sentido de la recta que va de q_1 a q_2 y $\vec{r}_{12}$ la distancia entre las cargas, fig.6.2.

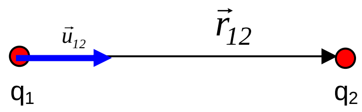


Fig.6.2

La constante ε_0 que aparece en la fórmula es la llamada **constante dieléctrica** del vacío y su valor aproximado es tal que

$$\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}\,\frac{C^2}{N\cdot m^2} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9\cdot 10^9 \;\; N\,m^2/C^2 \qquad (6.2)$$

La expresión matemática de la fuerza, es.(6.1), nos indica que la ley de Coulomb cumple la 3ª ley de Newton (acción igual a reacción), como es fácil de comprobar $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. Es decir, la fuerza que la carga q_1 ejerce sobre la q_2 es igual y contraria a la fuerza que la q_2 ejerce sobre la q_1, fig.6.3.

Fig.6.3

La fuerza entre partículas cargadas cumple el principio de acción y reacción

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

EJERCICIO RESUELTO

Determinar la fuerza que la carga q_1 ejerce sobre q_2, sabiendo que q_1=2.10^{-9} C y q_2=2.10^{-9} C, y los vectores de posición (distancia en metros) de las cargas son $\vec{r}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$, y $\vec{r}_2 = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$; ver fig.6.4.

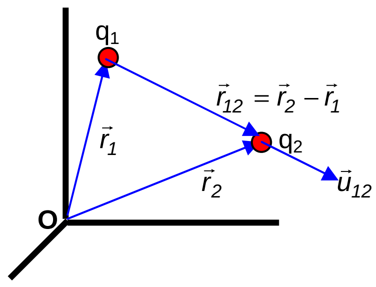


Fig.6.4

Par hallar la fuerza $\vec{F}_{12}$ que la carga q_1 ejerce sobre la carga q_2, calculamos primero el vector de posición $\vec{r}_{12}$ de la carga q_2 respecto de la q_1 y su módulo:

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (4\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}) - (2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}) = 2\vec{i} - \vec{j} - 8\vec{k}$$

$$|\vec{r}_{12}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-8)^2} = \sqrt{69}\ m$$

Ahora un vector unitario $\vec{u}_{12}$ que tenga la dirección y el sentido de $\vec{r}_{12}$

$$\vec{u}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} = \frac{2\vec{i} - \vec{j} - 8\vec{k}}{\sqrt{69}}$$

Por lo tanto la fuerza:

$$\vec{F}_{12} \approx 9\cdot\ 10^9\ \frac{2.10^{-9}\ \cdot\ 2.10^{-9}}{\left(\sqrt{69}\right)^2}\ \vec{u}_{12} \approx 5{,}28\cdot\ 10^{-9}\ \ \vec{u}_{12}\ \ N$$

6.1.4 DISTRIBUCIONES DE CARGA ELÉCTRICA. CAMPO ELÉCTRICO.

- ***Cargas puntuales***

Consideremos un conjunto de 2 cargas puntuales, q_1 y q_2; cuyos vectores de posición son $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$; fig.6.5. Se quiere calcular la fuerza sobre otra tercera carga q, cuya posición viene definida por el vector $\vec{r}$. La interacción eléctrica cumple el llamado **principio de superposición**, es decir, la fuerza eléctrica que sobre la carga q ejercen q_1 y q_2; es la suma vectorial de las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ que ejercerían q_1 y q_2 por separado.

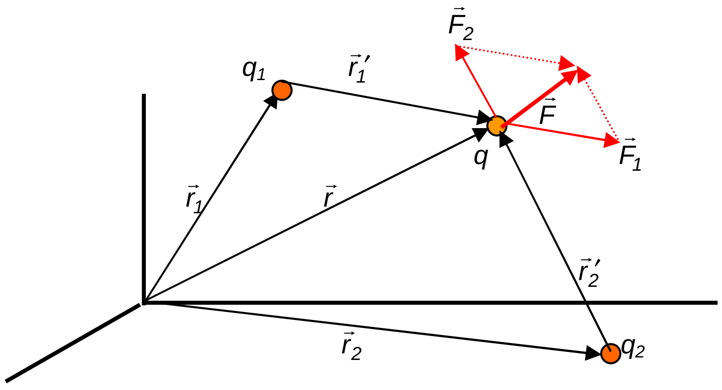
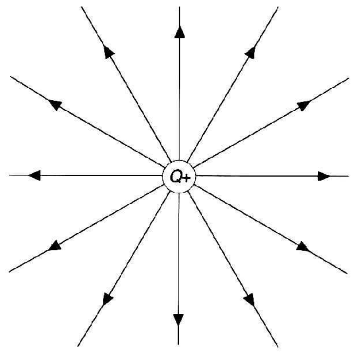
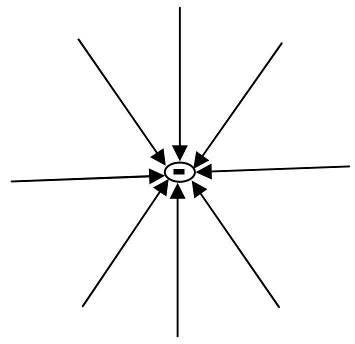


Fig.6.5



Las líneas del campo eléctrico creadas por una carga positiva son salientes. Una carga positiva es un manantial, de ella salen líneas de fuerza, que van a morir a una carga negativa o al infinito.



Las líneas del campo eléctrico de una carga negativa, son entrantes. Una carga negativa es un sumidero.

La fuerza sobre q, vendrá dada según el citado principio de superposición:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,q_1}{r_1'^2}\vec{u}_1' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,q_2}{r_2'^2}\vec{u}_2' = q\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{r_1'^2}\vec{u}_1' + \frac{q_2}{r_2'^2}\vec{u}_2'\right]\right)$$

Donde $\vec{u}_1'$; $\vec{u}_2'$ son vectores unitarios, en las direcciones de los vectores $\vec{r}_1'$ y $\vec{r}_2'$; los cuales determinan la posición del punto que ocupa la carga q, respecto de las otras dos cargas q_1 y q_2; que están engendrando el campo.

Sacando factor la carga q, de la expresión anterior de la fuerza, se puede escribir la ecuación de forma equivalente, del siguiente modo:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} \qquad (6.3)$$

En donde $\vec{E}$ está dado por:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{r_1'^2}\vec{u}_1' + \frac{q_2}{r_2'^2}\vec{u}_2'\right] \qquad (6.4)$$

Obsérvese que en la ec.(6.4) no aparece para nada la carga q ; se trata entonces de una propiedad creada por las cargas q_1 y q_2 ; llamada *campo eléctrico* $\vec{E}$ *en un punto*. Generalizando para un conjunto de n-cargas:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i'^2}\vec{u}_i' \qquad (6.5)$$

Permite calcular *el campo eléctrico* creado por *n*-cargas puntuales, en un punto del espacio, de vector de posición $\vec{r}$. Físicamente mide la perturbación producida por las cargas en el punto del espacio considerado.

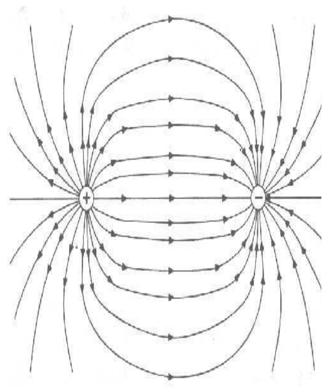
Las unidades del campo eléctrico son:

$$\frac{newton}{culombio} = \frac{N}{C}$$

Además:

$$\frac{N}{C} = \frac{N\cdot m}{C\cdot m} = \frac{V}{m}$$

Al campo eléctrico también se le define, como la fuerza que experimentaría la carga positiva unidad, situada en un punto del campo, *debido al conjunto de las n-cargas puntuales*. Podemos considerar que a cada punto del espacio con un determinado vector de posición $\vec{r}$ se le asigna un segmento orientado, cuya longitud y dirección va cambiando de un punto a otro del espacio, el vector $\vec{E}$. Si la carga eléctrica está aislada, la dirección del campo eléctrico es radial desde la carga, siendo su sentido saliente si ésta es positiva y entrante si fuese negativa (figuras al margen en la página anterior). Es útil representar el campo eléctrico mediante el concepto de ***líneas de fuerza***: *curvas tales, que en cada punto de ella el vector $\vec{E}$, es tangente a la misma.*



Líneas del campo eléctrico de dos cargas de signos opuestos.

EJERCICIO RESUELTO

Dadas las cargas q_1 = 10 μC, q_2 = 20 μC y q = -30 μC, *situadas en los puntos de coordenadas (1,0), (0,1) y (0,0), (en unidades de cm), respectivamente, determina la fuerza total que se ejerce sobre la carga q, fig.6.6*

La fuerza sobre la carga *q*, será

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1'^2}\vec{u}_1' + \frac{q_2}{r_2'^2}\vec{u}_2'\right),$$

$$r_1' = 10^{-2}\ m\ ,\quad r_2' = 10^{-2}\ m\ ,\quad \vec{u}_1' = -\vec{i}\ ,\quad \vec{u}_2' = -\vec{j}\ ,$$

$$\vec{F} \approx -9\cdot 10^{-9}\cdot 30\cdot 10^{-6}\cdot\left(-\frac{10\cdot 10^{-6}}{10^{-4}}\vec{i} - \frac{20\cdot 10^{-6}}{10^{-4}}\vec{j}\right) = 27\cdot 10^{-15}(\vec{i}+\vec{j})\ \ N.$$

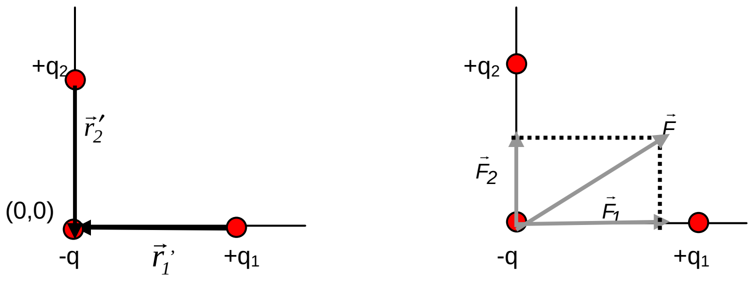


Fig.6.6

Cargas macroscópicas

Las cargas de un objeto macroscópico fig.6.7, pueden ser tratadas como una distribución continua con una densidad de carga, análogamente a como se hace con una distribución de masa, mediante la densidad de materia.

Si se considera una carga Q extendida uniformemente por un volumen V, se define **la densidad cúbica de carga** ρ (rho) como la carga contenida en cada unidad de volumen.

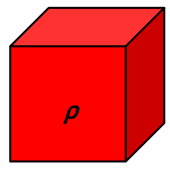
$$\rho = \frac{Q}{V} \qquad (6.6) \qquad \text{Sus unidades S.I. son el } \frac{C}{m^3}$$

Cuando la carga Q está distribuida uniformemente por una superficie A, se define **la densidad superficial de carga** σ (sigma) como la carga situada en cada unidad de superficie.

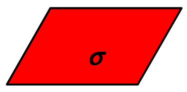
$$\sigma = \frac{Q}{A} \qquad (6.7) \qquad \text{Sus unidades S.I. son el } \frac{C}{m^2}$$

En el caso de que la carga Q se encuentre distribuida sobre una línea de longitud L, se define **la densidad lineal de carga** λ (lambda) como la carga existente en cada unidad de longitud.

$$\lambda = \frac{Q}{L} \qquad (6.8) \qquad \text{Sus unidades S.I. son el } \frac{C}{m}$$



La carga contenida en un volumen unidad, es la densidad cúbica de carga ρ.



La carga situada en una superficie unidad, es la densidad superficial de carga σ.

La carga distribuida en la unidad de longitud, es la densidad lineal de carga λ.

Fig.6.7

6.1.5 LEY DE GAUSS. APLICACIONES.

Consideremos una superficie elemental $d\vec{A}$, situada en un campo eléctrico $\vec{E}$, de modo que corta a las líneas de fuerza del campo. Se define el flujo elemental del campo eléctrico $d\phi_E$; a través del elemento de superficie, como el producto escalar del vector $\vec{E}$, por el vector $d\vec{A}$ (saliente y perpendicular a la misma), fig.6.8. En consecuencia: $d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{A}$

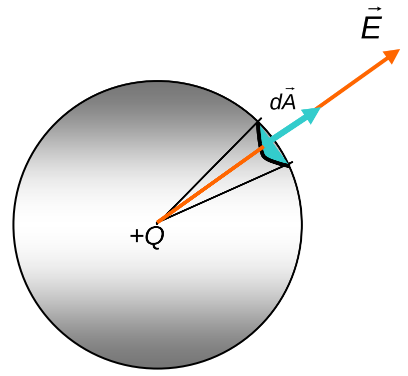


Fig.6.8. Deducción de la ley de Gauss. En la figura se representa el flujo del campo eléctrico a través del elemento de superficie $d\vec{A}$

Si consideramos una superficie cerrada que rodea a las cagas, el flujo a través de toda la superficie, es la suma de todos los flujos elementales, que se determina por una integral de superficie, (se expresa con el símbolo que aparece en la ecuación para indicar que se trata de una superficie cerrada).

$$\Phi_E = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

F*ísicamente, el flujo se relaciona con la intensidad del campo eléctrico en la región donde está situada la superficie cerrada, pudiendo ser positivo o negativo*. Cuando el flujo es positivo, significa que las líneas del campo salen de la superficie cerrada, mientras que si es negativo que entran.

Consideremos el caso particular de una carga puntual $+Q$ situada en el centro de una superficie esférica de radio r. El campo eléctrico es radial, saliente y del mismo módulo en todos los puntos de la esfera, cortando sus líneas de fuerza perpendicularmente a la superficie esférica, por lo tanto.

$$\Phi_E = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint \left[\vec{E}\right] \left|d\vec{A}\right| \cos 0 = \left|\vec{E}\right| \cdot A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad (6.9)$$

Puede demostrarse, que la ley de Gauss es válida para cualquier superficie cerrada que rodea a las cargas, llamada superficie gaussiana, aunque no sea esférica.

***La ley de Gauss** nos dice que el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada, es igual a la carga neta que hay en su interior, dividido por la constante dieléctrica del medio.*

Cuando el módulo del campo y el ángulo que forma con el elemento de área, valgan lo mismo en todos lo puntos de la superficie gaussiana, se puede prescindir de la integral y expresar la ley de Gauss de un modo más sencillo.

Para campos eléctricos uniformes: $$\vec{E} \cdot \vec{A} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \qquad (6.10)$$

Donde Q_{int} es la carga neta que hay en el interior de la superficie cerrada, que es la única que contribuye al flujo total según ***la Ley de Gaus.***

Si la carga estuviera fuera de la superficie, el flujo total sería nulo aunque exista el campo eléctrico, fig.6.9. *Localmente*, habrá algunos elementos de área de la superficie, que contribuyan positivamente al flujo y que se cancelarán con la contribución negativa, de otros elementos de la misma.

En aquellas situaciones físicas en las que la distribución de carga eléctrica tiene mucha simetría, la Ley de Gauss permite determinar el flujo, y además el campo eléctrico de un modo muy sencillo.

EJERCICIO RESUELTO

¿Cuánto vale el flujo del campo eléctrico a través de una esfera de radio 0,5 m, en cuyo interior hay una carga de –3 μC?

$$\Phi_E = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_o} = \frac{-3.10^{-9}C}{8{,}85.10^{-12}C^2 \cdot N^{-1} \cdot m^{-2}}$$

$$\Phi_E = -338\frac{N}{C}m^2$$

Se trata de un flujo entrante por ser negativo.

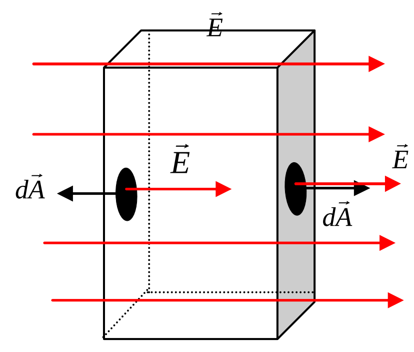


Fig.6.9 El flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada que no contiene cargas en el interior, entra de un lado de la superficie y sale el mismo por el otro, de modo que el flujo total es nulo.

DISTRIBUCIÓN ESFÉRICA DE CARGA.

Supongamos una esfera con densidad de carga uniforme ρ_0 y radio R. Calculemos el campo eléctrico en las distintas regiones del espacio fig.6.10

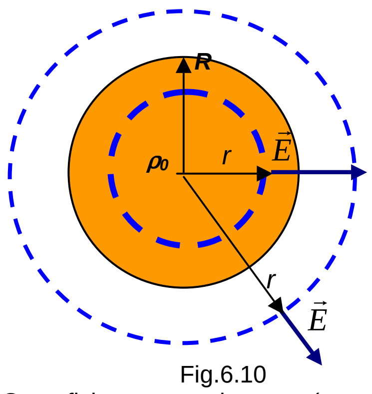


Fig.6.10

Superficies gaussianas (en líneas discontinuas), para calcular el campo eléctrico de una esfera cargada, en el interior y en el exterior de la misma.

Campo en el interior de la esfera donde $r < R$ **:**

El campo eléctrico será radial y valdrá igual en todos los puntos situados a la misma distancia del centro de la esfera, por lo que el campo tiene simetría esférica. Escojamos como superficie gaussiana una esférica concéntrica de radio $r < R$. La aplicación de la Ley de Gauss a dicha superficie da:

$$\left|\vec{E}\right| \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_0 \cdot V_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_0 \cdot (4/3)\pi r^3}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{E}\right| = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} r \qquad (6.11)$$

Ya que el campo es radial, si $\vec{u}_r$ es un vector unitario en esta dirección, se puede expresar el campo eléctrico en forma vectorial del siguiente modo:

$$\vec{E} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} r\, \vec{u}_r$$ El campo varía linealmente con la distancia al centro.

Campo en el exterior de la esfera donde $r \geq R$ **:**

Aplicando igualmente la Ley de Gauss a una superficie esférica de radio *r*, que ahora se toma exterior a la esfera pues $r \geq R$, tendremos:

$$\left|\vec{E}\right| \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_0 \cdot V_{esfera}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_o \cdot (4/3)\pi R^3}{\varepsilon_0}$$

y llamando a la carga total de la esfera: $Q_o = \rho_0 \cdot V = \rho_0 \cdot (4/3)\pi R^3$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_0}{r^2} \vec{u}_r \,. \qquad (6.12)$$

La ecuación del campo $\vec{E}$, en el exterior debido a la esfera cargada, es idéntica a la de una carga puntual de valor Q_0 situada en su centro.

- ***Hilo de carga.***

Supongamos un hilo de longitud infinita, cargado con una densidad de carga uniforme $\lambda_{0;}$ por unidad de longitud, fig.6.11. En todos los puntos situados a la misma distancia de la distribución rectilínea, el campo eléctrico vale igual, se dice que tiene simetría cilíndrica y además es radial. Para aplicar la Ley de Gauss tomamos un cilindro de altura H y radio r, coaxial con el hilo. El campo es perpendicular a la superficie lateral del cilindro, cuya área es $2\pi r H$ y la carga interior $Q_{int} = \lambda_o\, L = \lambda_o\, H$. El flujo a través de las tapas superior e inferior es nulo, pues en ellas el vector $\vec{E}$ y el vector $\vec{A}$ forman 90º, en consecuencia todo el flujo sale por la cara lateral. El flujo total vale:

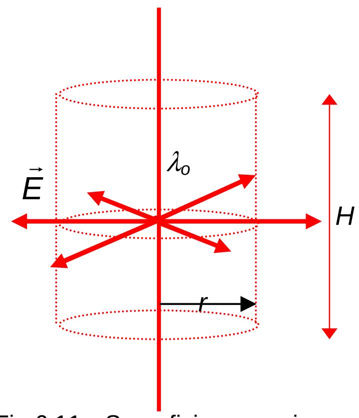


Fig.6.11. Superficie gaussiana, para calcular el campo de una distribución lineal de carga.

$$\left|\vec{E}\right| \cdot 2\pi r H = \frac{\lambda_0 H}{\varepsilon_0}; \quad \left|\vec{E}\right| = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 r}. \quad \textit{Vectorialmente:} \quad \vec{E} = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 r} \vec{u}_r \qquad (6.13)$$

El campo varía con el inverso de la distancia al hilo cargado.

- ***Plano cargado uniformemente***

Sea un plano de dimensión infinita, con densidad de carga uniforme σ_0 por unidad de área. El campo eléctrico es simétrico respecto del plano de carga y perpendicular a él. Tomamos de superficie gaussiana un cilindro de altura arbitraria y sección transversal de área S**,** con su eje perpendicular al plano, fig.6.12. y cortándolo simétricamente. El flujo solo sale por las caras superior e inferior de la superficie de Gauss, y la carga interior es $Q_{int} = \sigma_o S$.

El flujo total vale: $$\left|\vec{E}\right| \cdot S + \left|\vec{E}\right| \cdot S = \frac{\sigma_0 \cdot S}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{E}\right| = \frac{\sigma_0}{2\ \varepsilon_0} \qquad (6.14)$$

El campo es independiente de la distancia al plano cargado.

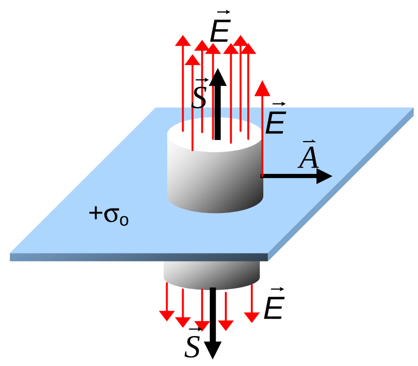


Fig.6.12. Superficie cilindrica gaussiana, para calcular el campo eléctrico de una superficie plana cargada uniformemente, (en azul en la figura). El flujo total que aparece en la ley de Gauss, es la suma de los flujos que salen por todas las caras de la superficie cerrada. En este caso, el flujo a través de la superficie lateral es nulo, pues el campo $\vec{E}$ forma 90º con el vector superficie lateral $\vec{A}$ y solo atraviesa el flujo del campo eléctrico por las caras superior e inferior.

6.1.6 POTENCIAL ELECTROSTÁTICO DE DISTRIBUCIONES DE CARGAS

El campo electrostático al igual que el campo gravitatorio, es un campo conservativo, y por este motivo, fig.6.13, el trabajo realizado por la fuerza del campo $\vec{F}$ para trasladar una carga *q,* desde un punto *A* hasta otro *B,* es el mismo, por cualquiera de los caminos, que llevan desde *A* hasta *B.*

$$W_{A\to B}(por\ el\ camino\ 1)=W_{A\to B}(por\ el\ camino\ 2)$$

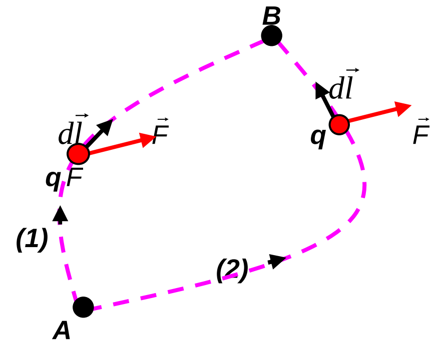


Fig.6.13

Por ser el campo eléctrico conservativo, el trabajo realizado por la fuerza del campo, entre dos puntos *A* y *B*, es el mismo por el camino *(1)* que por el camino *(2).*

- **Potencial**

En los campos conservativos se determina una magnitud escalar llamada potencial eléctrico, cuyo valor cambia de unos puntos a otros. *Se define el potencial en un punto A, como el trabajo que hace la fuerza del campo eléctrico, sobre la unidad positiva de carga, para trasladarla desde el punto A hasta otro D, que se toma de referencia.* Este trabajo hay que ir realizándolo en pequeños desplazamientos $d\vec{l}$, fig.6.14 pues la fuerza que ejerce el campo va variando por el camino. En general, si desplazamos una carga *q,* el trabajo elemental es de acuerdo con su definición.

$$dW=\vec{F}\cdot d\vec{l}=q\ \vec{E}\cdot d\vec{l}\ =q\vec{E}\cdot\left(dr\ \vec{u}_r+d\vec{n}\right)$$

Descomponiendo el trayecto *AD,* en pequeños tramos de longitud $d\vec{l}$, el trabajo total se calcula sumando todos los trabajos elementales, realizados sobre la carga, entre los punto *A* y *D.* Esta suma se halla mediante una integral, tomando de límites el punto *A* y el de referencia *D*. Como el potencial es el trabajo por unidad de carga, para calcularlo hay que dividir el trabajo total realizado, entre el valor de la carga *q* transportada.

$$V_A=\frac{W_{A\to D}}{q}=\frac{1}{q}\int_A^D q\ \vec{E}\cdot d\vec{l}=\frac{1}{q}\int_A^D q\ \vec{E}\cdot\left(dr\ \vec{u}_r+d\vec{n}\right)=\int_A^D \vec{E}\cdot dr\,\vec{u}_r \qquad (6.15)$$

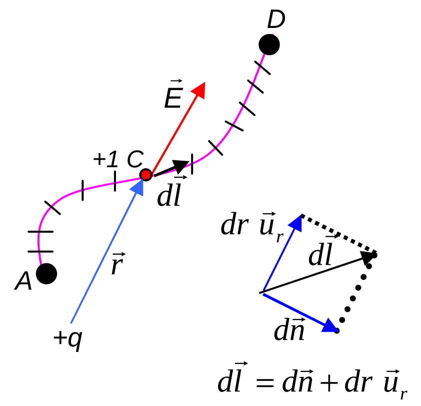


Fig.6.14. Para determinar el potencial en un punto *A*, se determina el trabajo sobre la unidad positiva de carga, entre ese punto y el de referencia *D*. El vector $d\vec{l}$ se descompone en la soma de dos, (a la derecha del dibujo), uno en dirección radial $dr\ \vec{u}_r$ y otro en dirección perpendicular a la radial $d\vec{n}$.

Porque los vectores $\vec{E}$ y $d\vec{n}$ son perpendiculares y su producto escalar es nulo. La unidad de potencial eléctrico, se deduce de su definición (trabajo por unidad de carga) y en el S.I. se llama voltio (*V*) siendo ***1 V = 1 J /1 C***

El valor del potencial en un punto, va a depender del punto de referencia, pero lo verdaderamente relevante, es la diferencia de potencial entre dos puntos del campo, y ésta no depende de la elección del punto *D.*

- **La diferencia de potencial entre dos puntos A y B***,* es sencillamente, la diferencia entre los potenciales de los dos puntos considerados, y es el trabajo para trasladar la unidad positiva de carga desde un punto al otro.

$$V_A-V_B=\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_A^B \vec{E}\cdot(d\vec{n}+dr\ \vec{u}_r)=\int_A^B \vec{E}\cdot dr\ \vec{u}_r \qquad (6.16)$$

- **Potencial de una carga puntual.**

Para calcular el potencial que produce una carga puntual *q,* en un punto a una distancia *r* de la misma, fig.6.15, hay que considerar, que el campo creado por la carga es radial y de valor $\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$

Fig.6.15

El campo eléctrico creado por una carga puntual positiva, es radial y saliente y $\vec{u}_r$ es un vector unitario en la dirección radial.

Aplicando la definición de potencial ec (6.16), y tomando en este caso el punto de referencia en el infinito, resulta:

$$V(r)=\int_r^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r\cdot dr\ \vec{u}_r=\int_r^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_r^\infty=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\,r} \qquad (6.17)$$

El potencial creado por una carga en un punto, varía inversamente con la distancia *r,* (módulo de $\vec{r}$) desde la carga, hasta el punto considerado.

- **Potencial de un conjunto de cargas puntuales.**

Un conjunto de n-cargas puntuales fig.6.16, modifica las propiedades del espacio, creando un potencial. En un punto *P*, el potencial debido a todas las cargas, se determina aplicando el principio de superposición. Llamando $\vec{r}_j'$ el vector de posición del punto *P,* respecto de la carga q_j *;* el potencial resultante en *P*, debido a las n-cargas es la suma de los potenciales que crea cada una, en el punto considerado de forma independiente.

$$V(\vec{r}) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1'} + \cdots + \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_j'} + \cdots\cdots + \frac{q_n}{4\pi\varepsilon_0 r_n'} = \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_j'} \qquad (6.18)$$

Las cargas negativas figurarán con el signo ***menos***, y las positivas con ***más.***

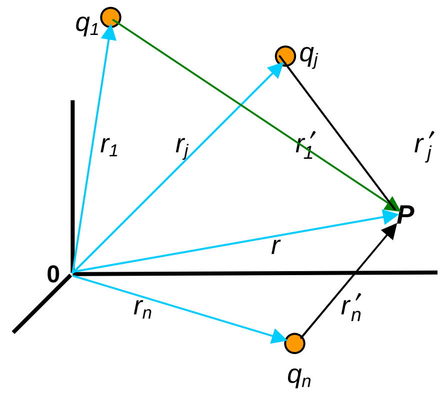


Fig.6.16
Conjunto de cargas puntuales con sus vectores de posición y el del punto *P,* en el que se desea calcular el potencial.

- **Distribución esférica de carga.**

Sea una esfera con densidad de carga uniforme ρ_0 en su interior, y con carga total Q_o; cuyo radio es R, fig.6.17. Como el campo eléctrico tiene simetría radial, el potencial también lo tendrá y como $d\vec{r} = \vec{u}_r\, dr$ .Aplicando la definición de potencial en un punto y determinando la integral a lo largo de un radio, del vector campo $\vec{E}$ desde el punto *r* hasta el infinito, *para puntos del exterior de la esfera donde* $r \geq R$ *resulta:*

$$V(r) = \int_r^{\infty} \vec{E}\cdot dr\, \vec{u}_r = \int_r^{\infty} \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r \cdot dr\, \vec{u}_r = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^{\infty}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Que solo depende del inverso de la distancia *r* la centro de la esfera. El potencial creado en puntos del exterior de la esfera, coincide con el que crearía una carga puntual de valor Q_0 situada en su centro.

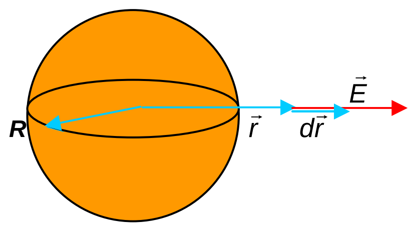


Fig.6.17
Esfera cargada uniformemente con densidad cúbica de carga ρ_o y radio R.

Para puntos del interior de la esfera en los que r<R ; para calcular el potencial hay que integrar el campo eléctrico interior, hasta la superficie de la esfera, y después el campo exterior desde la superficie *r = R* hasta el infinito, obteniéndose para el potencial una expresión más complicada.

$$V(\text{en el interior de la esfera cargada}) = \frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}(R^2 - r^2) + \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

- **Potencial creado por un plano cargado uniformemente**

Consideremos un plano cargado con densidad de carga uniforme σ_0, situado en ***z*** = 0 (en azul en la figura). Vamos a obtener el potencial eléctrico en un punto ***P*** de coordenadas ***(0,0,z)*** fig.6.18. Por simetría, el potencial eléctrico valdrá igual a ambos lados del plano cargado y su valor sólo dependerá de la distancia al mismo, coordenada ***z*** perpendicular al plano.

Para obtener el potencial *V*, tenemos que calcular la integral de línea a lo largo de una recta perpendicular al plano de carga, siendo ahora *dr = dz,* y vamos a calcularla en la parte superior del plano, donde es ***z > ***0. Usando el resultado del campo eléctrico (6.14), y tomando ahora el punto de referencia, en lugar de en el infinito, en el propio plano ***z*** = *0,* de (6.15) resulta:

$$V(z) = \int_z^{0} \vec{E}\cdot dr\, \vec{u}_r = \int_z^{0} \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} dz = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} z \qquad (6.19)$$

Observa que el potencial es cero en el plano (para *z = 0*, es *V = 0*) y a medida que aumenta *z,* el potencial es más negativo y por lo tanto menor. Se observa en la fig. 6.18, como el campo eléctrico apunta según los valores decrecientes del potencial, y que en planos paralelos al ***Z* = 0,** se forman familias de planos a igual potencial.

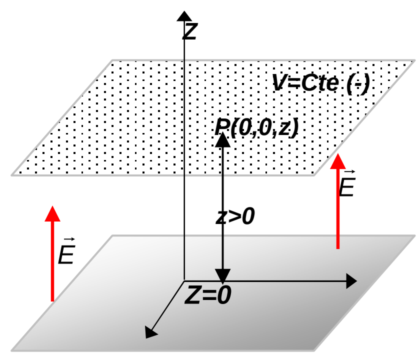


Fig.6.18
Plano de dimensiones infinitas, cargado uniformemente con una densidad superficial de carga uniforme σ_o (en azul en la figura). Todos los puntos del plano, constituyen una superficie equipotencial, a potencial cero, donde tomamos ahora el punto de referencia para los potenciales.

- **Superficies equipotenciales**

Se llama superficie equipotencial al lugar geométrico de los puntos del espacio en los que el potencial tiene el mismo valor, se representa por una ecuación $V(x,y,z)=$ *Cte.* Las superficies equipotenciales citadas anteriormente, son los planos paralelos al *XY*, que tienen por ecuación $V=-\frac{\sigma_o}{2\varepsilon_o}z$. Esta ecuación para cada valor *z,* toma un valor constante, pues todas las magnitudes que figuran en la misma, σ_o, ε_o y *z;* tienen un valor fijo y determinado, una vez que se particulariza para una distribución plana de cargas. De un modo general, las superficies equipotenciales son perpendiculares en todos sus puntos al vector campo eléctrico fig.6.18.

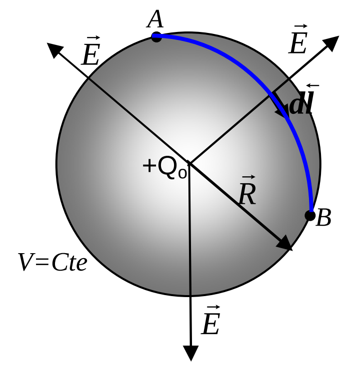


Fig. 6.19. La superficie de la esfera de radio $\vec{R}$, constituye una superficie equipotencial V = *Cte*, por estar todos sus puntos a igual distancia de la carga $+Q_o$ situada en su entro. Se ha trazado un camino entre dos puntos cualesquiera A y B de la superficie y un vector $d\vec{l}$ a lo largo del mismo.

La ecuación (6.16) permite calcular la diferencia de potencial entre dos puntos. Si *A* y *B* están sobre la misma superficie equipotencial es $V_B=V_A$ por lo que $V_A-V_B=0$. Además, $d\vec{l}$ está sobre la superficie equipotencial a lo largo de una línea que va desde un punto al otro, fig. 6.19. De sustituir en (6.16); resulta la relación $0=\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$, que se cumple cualquiera que sea $d\vec{l}$; y de ella se deduce que el producto escalar $\vec{E}\cdot d\vec{l}=0$, por lo que al ser nulo, $d\vec{l}$ y el campo $\vec{E}$, tienen que ser vectores perpendiculares, es decir, ***las líneas de fuerza del campo eléctrico cruzan perpendicularmente a las superficies equipotenciales, fig.6.18.***

Relación entre el campo eléctrico y el potencial

El campo eléctrico $\vec{E}$ es un vector y para determinarlo es necesario conocer su módulo, dirección y sentido. El potencial electrostático *V* es una función escalar, y para calcularlo basta con un valor numérico, sin embargo, estas dos magnitudes del campo electrostático están relacionadas entre sí, mediante el operador llamado *"gradiente".*

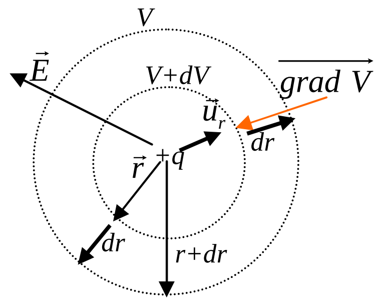


Fig.6.20 El gradiente del potencial va en el sentido de los potenciales crecientes, (recuérdese que el potencial debido a una carga puntual es $V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r}$ y decrece cuando aumenta la distancia r a la misma, si ésta es positiva). El campo electrostático $\vec{E}$ tiene sin embargo sentido saliente de la carga positiva, siendo además perpendicular a las superficies equipotenciales.

Consideremos el campo eléctrico creado por una carga $+q$ y en él dos superficies equipotenciales muy próximas, de radios r y $r+dr$; que están respectivamente a potenciales gravitatorios $V+dV$ y V, (recuérdese que el potencial de una carga positiva disminuye con la distancia), fig. 6.20. *Se define el gradiente del potencial,* $\overrightarrow{grad}\ V$ *, como un vector perpendicular a las superficies equipotenciales, cuyo sentido es hacia los valores crecientes del potencial.*

Físicamente, el gradiente del potencial en un punto, proporciona la máxima variación que experimenta el potencial gravitatorio por unidad de longitud recorrida. Si la diferencia de potencial entre las dos superficies es: $(V+dV)-V=dV$; y dr su distancia, el valor del gradiente es el cociente dV/dr y si $\vec{u}_r$ es un vector unitario en la dirección radial y saliente desde la carga, el vector gradiente del potencial puede expresarse:

$$\overrightarrow{grad}\,V=\frac{dV}{dr}\vec{u}_r \qquad [6.20]$$

Donde el sentido del gradiente viene determinado por el signo de la derivada.

Por otra parte, el campo eléctrico producido por una carga positiva es radial y saliente, fig.6.21, y la diferencia de potencial dV entre las dos superficies consideradas, se puede expresar como el producto escalar de los vectores $\vec{E}$ y $dr\,\vec{u}_r$; del siguiente modo: $dV = \vec{E}\cdot dr\,\vec{u}_r = E\,dr\,cos 0 = E\,dr$

De donde deducimos que $\frac{dV}{dr} = E$.

Ahora bien como los vectores $\vec{E}$ y $\overrightarrow{grad}\,V$ tienen sentidos contrarios, resulta:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V = -\frac{dV}{dr}\vec{u}_r \qquad [6.21]$$

El campo electrostático es igual al gradiente del potencial electrostático cambiado de signo. El signo menos indica que el vector campo va en el sentido de los potenciales decrecientes, es decir, en sentido contrario al del vector gradiente del potencial.

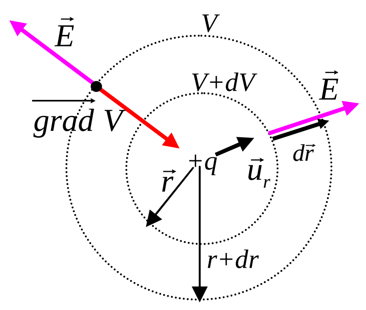


Fig.6.21. El campo eléctrico va en el sentido de los potenciales *decrecientes, es decir, en sentido opuesto al del gradiente del potencial.*

Ejercicio resuelto

Sabiendo que el potencial electrostático de una carga positiva vale: $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r}$.

Determina el vector campo eléctrico.

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dr}\vec{u}_r = -\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r}\right)\vec{u}_r = -\left(-\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2}\right)\vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2}\vec{u}_r$$

6.1.7 ENERGÍA ELECTROSTÁTICA.

La fuerza electrostática es conservativa, y que el campo eléctrico (fuerza por unidad de carga) también lo es. Al igual que ocurría con la interacción gravitatoria, cuando tenemos un conjunto de cargas también el sistema posee una energía potencial, ahora electrostática, U_E, la cual se determina calculando el trabajo que el campo eléctrico realizaría sobre las cargas, cuando estas se mueven desde la posición que ocupan, hasta otra en la cual están muy alejadas entre sí y su interacción es despreciable. El trabajo que un campo eléctrico $\vec{E}$ realiza sobre una carga q que se mueve desde una posición ***A*** hasta otra ***B,*** se puede expresar en términos de la diferencia de potencial V entre estos puntos. De acuerdo con la definición de trabajo y recordando la fig.6.14 y la ecuación (6.16), resulta.

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{F}\cdot dr\,\vec{u}_r = \int_A^B q\,\vec{E}\cdot dr\,\vec{u}_r = q\int_A^B \vec{E}\cdot dr\,\vec{u}_r = q\cdot(V_A - V_B) \qquad [6.22]$$

E trabajo que hace la fuerza del campo eléctrico sobre una carga q, entre dos puntos A y b, es igual al producto de la carga por la diferencia de potencial entre esos dos puntos.

- ***Energía de una carga dentro de un campo eléctrico***

Sea una carga *q* que se encuentra en el campo eléctrico creado por otras cargas, encontrándose en un punto *A* de vector de posición $\vec{r}_A$, en el que el potencial vale $V(\vec{r}_A)=V$. Al dejarla libre la carga se pone espontáneamente en movimiento, por lo que tiene una energía potencial, llamada electrostática. Su valor es igual al trabajo realizado sobre q, por la fuerza del campo, para llevarla desde el punto A hasta el infinito, donde el potencial es nulo. Aplicando la ecuación (6.22) y haciendo $B \rightarrow \infty$ con lo que $V_B = 0$, resulta

$$U_E = W_{A\rightarrow\infty} = q \cdot [\,V(\vec{r}_A) - 0\,] = q \cdot V \qquad (6.23)$$

La energía potencial electrostática la tiene la carga q, y no el campo eléctrico en el que se encuentra sumergida.

El trabajo que realiza el campo eléctrico sobre *q*, entre dos puntos *A* y *B*, es igual a la variación de la energía potencial de la carga, entre el primer punto y el segundo

$$W_{AB} = U_E(\vec{r}_A) - U_E(\vec{r}_B) \qquad (6.24)$$

En las proximidades de transformadores o de líneas de alta tensión, los campos eléctricos son muy intensos.

EJERCICIO RESUELTO

En un tubo de televisión de rayos catódicos, los electrones son acelerados por una diferencia de potencial de 15000 V. Determina la velocidad que alcanzan los electrones cuando inciden sobre la pantalla ($m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ Kg) y la intensidad del campo eléctrico en el tubo (longitud del tubo = 20 cm).
Carga del electrón $-1{,}6.\ 10^{-19}$ C

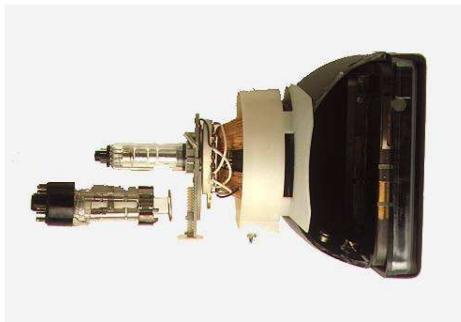
Apliquemos el principio de conservación de la energía al electrón que se está acelerando: Energía cinética + Energía potencial electrostática es constante por ser el campo conservativo. Cuando el electrón comienza a moverse su velocidad es nula y el potencial eléctrico también, por tanto su energía total es nula. Al llegar a la pantalla que tiene potencial *V,* su velocidad tendrá un valor *v,* pero su energía total seguirá siendo cero, por ser el campo eléctrico conservativo. Resulta:

$$E_c + U_E = \frac{1}{2} m_e v^2 + q_e V = 0$$

$$v = \sqrt{\frac{-2q_e V}{m_e}} = \sqrt{\frac{-2(-1{,}6 \cdot 10^{-19})15000}{9{,}11 \cdot 10^{-31}}} \approx 73.10^6\, m.s^{-1}$$

Suponiendo que el potencial varía linealmente con la distancia

$$E = \frac{V}{longitud\ de\ tubo} \approx \frac{15000}{0{,}2} = 75\ 000\ \ V\,m^{-1}$$



Tubo de rayos catódicos para una pantalla de televisión. (Fotografía tomada de la enciclopedia Encarta). Los electrones emitidos por un filamento incandescente situado en la parte posterior del tubo electrónico, son acelerados por un campo eléctrico muy intenso ganando energía cinética y llegando a la pantalla con la energía suficiente para producir en ésta luminiscencia.

- ***Energía de una pareja de cargas puntuales.***

Supongamos dos cargas, q_1 en $\vec{r}_1$ y q_2 en $\vec{r}_2$. Manteniendo la carga q_2 en su posición, se calcula el trabajo que hace el campo eléctrico creado por esta carga, sobre la carga q_1 para trasladarla hasta el infinito. A continuación, moveríamos la carga q_2 hasta el infinito, pero en este caso el campo sobre la q_2 ya es nulo porque la carga q_1 está muy alejada y por lo tanto también su trabajo. La suma de estos dos trabajos (el segundo en este caso es nulo) es la energía de la pareja de cargas. Coincide con la energía potencial de la carga q_1 por estar situada en el campo de q_2 donde el potencial vale V_2 (1); cuyo significado, es el potencial creado por la carga q_2 en el lugar ocupado por q_1. En la fig.6.21 se dibujan los vectores de posición.

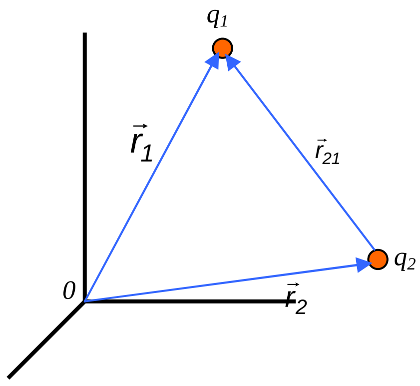


Fig. 6.21. Vectores de posición de dos cargas puntuales y del vector que separa las cargas $\vec{r}_{21}$.

$$U_E = q_1 \cdot V_2(1) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\, r_{21}} \qquad (6.25)$$

El resultado no variaría al intercambiar el orden, trasladando primero q_2 al infinito, dejando q_1 quieta, y llevando ésta después. La energía sería:

$$U_E = q_2 \quad V_1(2) = q_1 \quad V_2(1) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{21}} \qquad (6.26)$$

Donde $V_1(2)$ es el potencial creado por q_1 en la posición que ocupa q_2.
Como $r_{21} = r_{12}$; las ecuaciones [6.25] y [6.26] son iguales, en consecuencia la ecuación de la energía potencial también se puede escribir en la forma:

$$U_E = \frac{1}{2} q_1 V_2(1) + \frac{1}{2} q_2 V_1(2) \qquad (6.27)$$

En donde aparece la suma, de la mitad del producto de cada carga, por el potencial que produce la otra, en el lugar ocupado por ella misma.

- ***Energía de un conjunto de cargas puntuales***

Si tenemos un conjunto de cargas q_j que ocupan posiciones en el espacio $\vec{r}_j$, la energía del conjunto se determina por medio del trabajo que haría el campo eléctrico al *desmontar* (alejando las cargas unas de otras) la configuración del sistema. La expresión de la energía es una extensión de la formula (6.27) de una pareja de cargas. Llamando $V'(j)$, al potencial creado en *j* por el resto de las cargas (todas excepto la carga q_j).

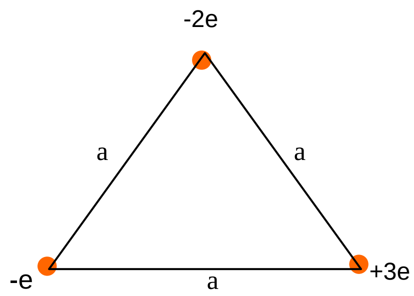


Fig.6.22 Sistema de tres cargas puntuales, situadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado *a*.

$$U_E = \sum_j \frac{1}{2} q_j V'(j) \qquad (6.28)$$

Es fácil demostrar, que la anterior expresión también es igual a la suma de las energías, de todas las parejas distintas que se pueden formar con el conjunto de cargas. Llamando r_{ij} la distancia entre las cargas q_i y q_j *resulta*

$$U_E = \sum_{par\ ij} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0\, r_{ij}} \qquad (6.29)$$

EJERCICIO RESUELTO

*Determina la energía electrostática del sistema formada por tres cargas: –**e**, –2**e** y +3**e**, situadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado a =2.10^{-10} m, fig.6.22.*
Tómese: $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}\, C^2 \cdot N^{-1} \cdot m^{-2}$; $e = 1{,}6\ .\ 10^{-19}$ C.

Por haber 3 cargas se pueden formar tres parejas distintas y aplicar la ec.(6.29)

$$U_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o a}\left[(-e)\cdot(-2e) + (-e)\cdot(+3e) + (-2e)\cdot(+3e)\right] = \frac{-7e^2}{4\pi\varepsilon_o a} = -8{\cdot}10^{-18}\, J$$