6 Trabajo y energía

Las interacciones mecánicas de las partículas van acompañadas de manifestaciones de la energía, que se presentan en diversas formas. Unas a modo de intercambio energético como el trabajo o el calor, por esto son energías en transito y otras, mediante la cesión o acumulación en el cuerpo, en forma de energía cinética o potencial.

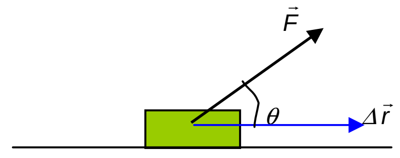


Fig.1.31 Trabajo realizado por una fuerza constante.

6.1 Trabajo

Cuando la fuerza aplicada a un cuerpo produce su desplazamiento, se dice entonces que efectúa trabajo. *Se define el trabajo* como el producto escalar de la fuerza por el desplazamiento.

En el caso de que la trayectoria sea una recta fig. 1.31 y la fuerza $\vec{F}$ sea constante formando con el desplazamiento $\Delta\vec{r}$ un ángulo α, entonces el trabajo es de acuerdo con la definición.

$$W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = F\,\Delta r\,\cos\alpha \qquad (1.21)$$

El trabajo es el producto del módulo de la fuerza por el módulo del desplazamiento por el coseno del ángulo que forman.

El trabajo depende del ángulo α de los vectores $\vec{F}$ y $\Delta\vec{r}$; de modo que puede ser: Positivo si $0 \le \alpha < 90º$. Nulo si $\alpha = 90º$. Negativo si $90º < \alpha \le 180º$.

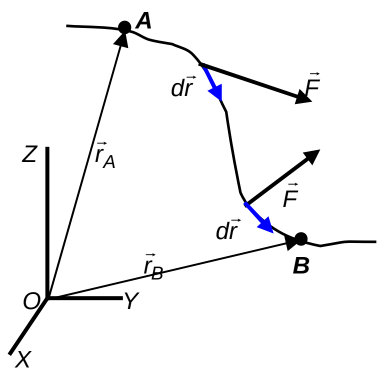


Fig.1.32. Cuando la fuerza no es constante a lo largo del camino, (observa que en el dibujo cambia de módulo y dirección) entonces el trabajo realizado entre dos puntos *A* y *B* hay que efectuarlo mediante la suma de todos los trabajos elementales.

Cuando la fuerza $\vec{F}$ que actúa no es constante y va variando a lo largo del camino fig.1.32, entonces hay que definir el trabajo realizado en cada desplazamiento elemental $d\vec{r}$, definiéndose el trabajo elemental, como $dW = \vec{F}\cdot d\vec{r}$ .El trabajo total entre *A* y B es la suma de todos los trabajos elementales, fig.1.33. Matemáticamente se calcula con una integral de línea.

$$W = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad (1.22)$$

En coordenadas cartesianas la fuerza y el desplazamiento tienen tres componentes, por lo que resultan: $\vec{F} = F_x\,\vec{i} + F_y\,\vec{j} + F_z\,\vec{k}$; $d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$ que en su caso habrán de sustituirse en la ec(1.22) para hallara el trabajo.

La unidad de trabajo y de energía en el sistema internacional es el *julio (J), que es el trabajo realizado por una fuerza de 1newton (N) cuando desplaza su punto de aplicación 1 m, en la dirección y sentido de la fuerza aplicada.*

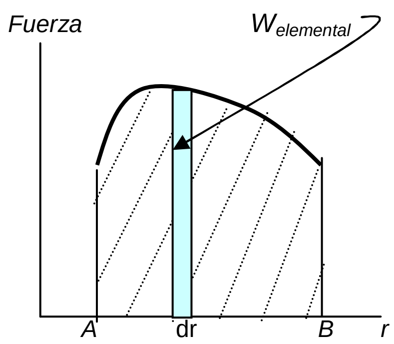


Fig.1.33. El valor del área bajo la curva en un diagrama fuerza-desplazamiento, determina el total del trabajo efectuado entre dos puntos *A* y *B.* El área pequeña es el trabajo elemental.

Ejemplo 6.1

Una fuerza $\vec{F} = 3x\,\vec{i}$ actúa sobre un cuerpo a lo largo del eje X, desde el punto A(2,0) hasta el punto B(9,0). Determina el trabajo realizado durante el desplazamiento.

La fuerza aplicada es variable pues va cambiando a medida que lo hace la posición *x*. Como el desplazamiento es a lo largo del eje *X*, resulta que los valores de *y*; *z* son cero, por lo que únicamente $d\vec{r} = dx\,\vec{i}$. Sustituyendo en ec.(1.19).

$$W = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{(2,0)}^{(9,0)} 3x\,\vec{i}\cdot dx\,\vec{i} = 3\int_2^9 x\;dx = 3\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^9 = 3\left[\frac{9^2}{2} - \frac{2^2}{2}\right] = 115{,}5\,J$$

6.2 Potencia

Las máquinas se aprecian más que por el trabajo realizado, por la rapidez con que pueden hacerlo. La magnitud física que relaciona el trabajo total realizado *W,* con el tiempo empleado en efectuarlo (*t - t´);* se denomina potencia media y representa el trabajo realizado por unidad de tiempo.

$$P_m = \frac{W}{t - t'} \qquad (1.23)$$

En el S. I. la unidad de potencia es el *Vatio (W) que es la potencia de una máquina que efectúa en un segundo, el trabajo de 1 julio. 1 W= 1J/1s.* Unos múltiplos muy empleados son el $kW = 10^3\ W$ y el $MW = 10^6\ W$.

Una unidad de energía muy utilizada por las compañías eléctricas es el kilovatio-hora: $1\ kWh = 10^3\ W \cdot 3600\ s = 3{,}6.10^6 J$

Para determinar la potencia transmitida en un determinado instante de tiempo se define la potencia instantánea, como la derivada de la energía o del trabajo, respecto del tiempo.

$$P = \frac{dW}{dt} \qquad (1.24)$$

Resulta muy útil relacionar la potencia transmitida, con la fuerza $\vec{F}$ aplicada y el valor de la velocidad $\vec{v}$ del cuerpo. Sustituyendo en ec.(1.21) el trabajo elemental $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ y expresando después $d\vec{r} = \vec{v}\, dt$ resulta:

$$P = \frac{d\,W}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot (\vec{v}\ dt)}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \qquad (1.25)$$

La potencia instantánea es el producto escalar de la fuerza por la velocidad.

Otra unidad de potencia también utilizada aunque va en desuso es el caballo de vapor, su equivalencia con el vatio es.

$$1\ C\ V = 735\ W$$

Ejemplo 6.2

La trayectoria de una partícula de masa m= 50 kg es la línea que describe el extremo del vector de posición $\vec{r}(t) = t^2\,\vec{i} + 2\,t\,\vec{j}$. Calcula una expresión para la potencia instantánea y determina su valor en el instante t = 4 s. en W y en caballos de vapor. Unidades del S.I.

Se va a aplicar la ec.(1,22) para lo que es necesario determinar primero la $\vec{F}$ y la $\vec{v}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2t\,\vec{i} + 2\,\vec{j}\ ; \qquad \text{La aceleración } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\,\vec{i}\ m/s^2$$

La fuerza: $\vec{F} = m \cdot \vec{a} = 50\,kg \cdot 2\,\vec{i}\ m/s^2 = 100\ \vec{i}\ N$

La potencia instantánea $P = \vec{F} \cdot \vec{v} = 100\,\vec{i} \cdot (2t\,\vec{i} + 2\,\vec{j}) = 200\,t$

L a potencia en el instante $t = 4\ s$, $P(4\,s) = 200 \cdot 4 = 800\,W$

En caballos de vapor: $P(4\,s) = \frac{800}{735}\,CV = 1{,}09\,CV$

Retrato de Watt

James Watt (1736-1819) Ingeniero escocés, que mejoró notablemente el rendimiento de la máquina de vapor debida a Newcomen, que funcionaba en su tiempo.

Modifico aquella máquina introduciendo una nueva cámara donde se conducía el vapor para producir su enfriamiento, mientras que la primera cámara se mantenía siempre caliente. Introdujo otras mejoras ingeniosas que permitían al vapor entrar a uno y a otro lado de un pistón aumentando mucho el rendimiento. También Inventó unos artificios mecánicos para transformar el movimiento horizontal del pistón, en movimiento de rotación de una rueda, sistema biela-manivela, con lo que la máquina tuvo múltiples aplicaciones nuevas, siendo en gran medida propulsora de la revolución industrial.

También diseño el regulador centrífugo, el cual automáticamente controlaba la salida de vapor de la máquina. Este mecanismo fue el pionero de los procesos de automatización, que permiten controlar los procesos, mediante variaciones producidas en el proceso mismo.

Watt buscó el modo de medir la potencia, para lo que hizo la prueba con un caballo muy fuerte, y vio que podía levantar un peso de 150 libras (1 libra = 0,4536 kg) a 4 pies de altura (1 pie = 0,3048 m) en 1s. Sin embargo la unidad del S.I. es algo diferente al valor que se obtiene calculando la potencia con estos datos, ¿podrías determinar cuanto?.

6.3 Trabajo y energía cinética

La fuerza efectúa trabajo cuando desplaza el cuerpo sobre el que actúa, ahora bien, si el trabajo es una forma de la energía que transita entre los cuerpos, ¿a dónde se va?. Para contestar es preciso realizar unos cálculos, relacionando varias magnitudes que ya conocemos. De la definición del trabajo ec.(1.22) y de la ecuación $\vec{F} = m\,\vec{a}$ teniendo en cuenta la expresión de las componentes intrínsecas de la aceleración ec.(1.6) resulta:

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B m\,\vec{a}\cdot d\vec{r} \quad ; \qquad \text{con} \qquad d\vec{r} = \vec{v}\,dt = v\,\vec{\tau}\,dt$$

Operando: $$\vec{a}\cdot d\vec{r} = \left(\frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}\right)\cdot v\,\vec{\tau}\,dt = \frac{dv}{dt}v\,dt + 0 = v\,dv$$

Recuerda que $\vec{n}$ y $\vec{\tau}$ son dos vectores unitarios perpendiculares, por lo que su producto escalar es nulo $\vec{n}\cdot\vec{\tau} = 0$; mientras que $\vec{\tau}\cdot\vec{\tau} = 1$

$$W_{A\to B} = \int_A^B mvdv = \frac{1}{2}m\left[v^2\right]_A^B = \frac{1}{2}m\left[v_B^2 - v_A^2\right] = \frac{1}{2}\;mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

Cada uno de los términos del segundo miembro por tratarse de la energía que lleva un cuerpo cuando tiene velocidad, se designa como energía cinética. La ecuación completa se conoce como *ecuación de la energía* y el $W_{A\to B}$ se refiere al trabajo total que realizan todas las fuerzas que actúan, o lo que sería equivalente, su resultante. De modo general se debe escribir:

$$\sum W_{A\to B} = E_c(B) - E_c(A) = \Delta E_c \qquad (1.26)$$

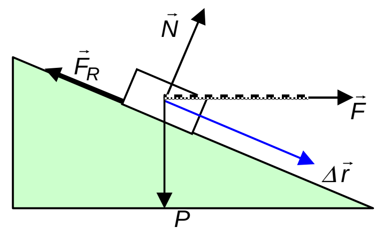


Fig.1.34. Bloque que desliza hacia abajo por un plano inclinado con rozamiento, bajo las fuerzas de la figura, donde $\vec{F}$ es una fuerza aplicada mediante una cuerda que tira horizontalmente del bloque. El trabajo de todas las fuerzas, se invierte en variar la energía cinética.

$$\vec{F}_R\cdot\Delta\vec{r} + \vec{N}\cdot\Delta\vec{r} + \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} + \vec{P}\cdot\Delta\vec{r} = \Delta E_c$$

El trabajo realizado por todas las fuerzas aplicadas a un cuerpo, se invierte en incrementar su energía cinética. En la ecuación, deben figurar los trabajos de todas las fuerzas, fig.1.34, con independencia de que sean conservativas como por ejemplo el peso, o disipativas como el rozamiento.

Ejemplo 6.3

A un cuerpo de masa 10 kg están aplicadas las fuerzas: $\vec{F}_1 = 20\,\vec{i} - 10\,\vec{j}$ *y* $\vec{F}_2 = 10\,\vec{i} + 15\,\vec{k}$ *en N. En el instante inicial la partícula está en un punto A con una* $\vec{v}_A = 3\,\vec{i} + 2\,\vec{j} - 6\,\vec{k}$ *en m/s. Halla el trabajo realizado por las fuerzas entre los instantes t = 0 y t = 2 s en que llega a un punto B.*

La fuerza resultante es: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \left(20\,\vec{i} - 10\,\vec{j}\right) + \left(10\,\vec{i} + 15\,\vec{k}\right) = 30\,\vec{i} - 10\,\vec{j} + 15\,\vec{k}$

La aceleración de la partícula es $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m} = \dfrac{30\,\vec{i} - 10\,\vec{j} + 15}{10} = 3\,\vec{i} - \vec{j} + 1{,}5\,\vec{k}\;\; m/s^2$

Que es una aceleración constante y por tanto el movimiento es uniformemente acelerado, siendo la velocidad en *B*, $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{a}\cdot t$

$$\vec{v}_B = 3\vec{i} + 2\,\vec{j} - 6\,\vec{k} + \left(3\,\vec{i} - \vec{j} + 1{,}5\,\vec{k}\right)\cdot 2 = 9\,\vec{i} - 3\,\vec{k} \quad m/s$$

Los módulos al cuadrado de los vectores velocidad son:

$$v_A^2 = 3^2 + 2^2 + (-6)^2 = 49\,\frac{m^2}{s^2} \quad \text{y} \quad v_B^2 = 9^2 + (-3)^2 = 90\,\frac{m^2}{s^2}$$

El trabajo entre *A* y *B*: $W_{A\to B} = \dfrac{1}{2}10\,kg\cdot 90\,\dfrac{m^2}{s^2} - \dfrac{1}{2}10\,kg\cdot 49\,\dfrac{m^2}{s^2} = 205\,J$

7 Energía potencial

Existen ciertas regiones del espacio en las que sobre un cuerpo actúan determinadas fuerzas, se conoce como un campo de fuerzas. Si al desplazar un cuerpo entre dos puntos *A* y *B,* el trabajo realizado es independiente del camino seguido para ir de un punto al otro fig.1.35, estas fuerzas se llaman conservativas y el trabajo que realizan es a costa de una energía que posee el cuerpo en el campo, llamada energía potencial.

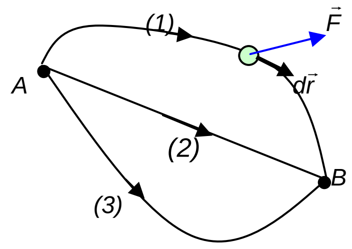


Fig.1.35. Cuando el trabajo entre dos puntos *A* y *B* es el mismo por todos los caminos, sea el *(1),* el *(2)* o el *(3),* entonces la fuerza es conservativa y el trabajo es igual a la diferencia de la energía potencial de la masa *m,* entre estos puntos.

7.1 Energía potencial gravitatoria

Si en el campo gravitatorio de una masa como por ejemplo la Tierra, situamos otra nueva masa y la dejamos libre, observamos que espontáneamente se pone en movimiento mediante el trabajo realizado por el peso. Este trabajo entre dos puntos *A* y *B* fig.1.36, se efectúa a costa de la energía potencial *U,* que tiene en el campo gravitatorio la masa *m,* siendo $W_{A\rightarrow B} = U(A) - U(B)$, sin embargo, se acostumbra a expresarlo como diferencia de la energía potencial en el punto final *B*, menos en el punto inicial *A,* es decir:

$$W_{A\rightarrow B} = U(A) - U(B) = -\big(U(B) - U(A)\big) = -\Delta U \qquad (1.27)$$

El trabajo realizado por la fuerza conservativa es igual a menos la variación de la energía potencial, y la ec.(1.27) es la definición de energía potencial en un campo conservativo Siempre se van a medir diferencias de energías potenciales, de modo que a efectos prácticos, se acostumbra a tomar un nivel de referencia al que se asigna el valor cero de la energía potencial. Si los desplazamientos son de pequeña magnitud, para calcular la energía potencial gravitatoria se utiliza la expresión $U = mgh$, siendo *h* la altura sobre el punto de referencia en el que $h = 0$.

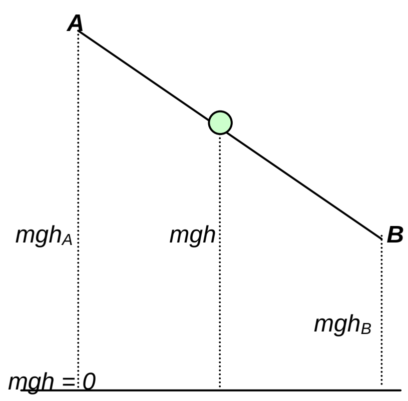


Fig.1.36 Para medir diferencias de energías potenciales, por convenio se asigna a un punto energía potencial nula.

7.2 Energía potencial elástica.

Supongamos un muelle que se encuentra en la posición de equilibrio y al que le aplicamos una fuerza muy lentamente, a través de sucesivos estados de equilibrio, para que el muelle no adquiera energía cinética. Entonces, en todo momento la fuerza aplicada $\vec{F}'$ será igual y opuesta a la fuerza elástica $\vec{F}$ que el muelle ejerce sobre nosotros (3ª Ley de Newton). Por lo tanto:

$$\vec{F}' = -\vec{F} = -\left(-k\,x\,\vec{i}\right) = kx\,\vec{i}\ .$$

Por tratarse de una fuerza no constante la representación gráfica del módulo de *F´* en función del alargamiento, es la recta de la fig.1.37 y el trabajo que realiza para producir un alargamiento x, se puede calcular por el valor del área bajo la recta o bien por aplicación de la ec. (1.22). El trabajo de la fuerza elástica $\vec{F}$ del muelle, será de signo contrario. En efecto.

$$W = \int_0^x \vec{F}\cdot dx\,\vec{i} = -\int_0^x \vec{F}'\cdot dx\,\vec{i} = -\int_0^x kx\,\vec{i}\cdot dx\,\vec{i} = -\int_0^x kx\,dx = -\frac{1}{2}k\,x^2$$

Ahora bien, este trabajo realizado por el muelle es menos la variación energía potencial elástica, ec.(1.27). Tomando como referencia, la energía del muelle cuando su deformación es nula, en $x = 0$, (a la que se asigna el valor cero), en una posición del muelle *x,* la energía potencial elástica será:

$$U(x) = -W = \frac{1}{2}\,k\,x^2 \qquad (1.28)$$

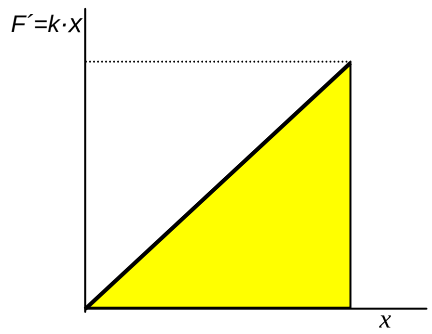


Fig.1.37. El trabajo realizado por la fuerza aplicada se calcula por el valor del área del triángulo, bajo la recta y el eje horizontal. Área = ½ Base x altura.

$$W' = \frac{1}{2}x\cdot F' = \frac{1}{2}x\cdot kx = \frac{1}{2}k\cdot x^2$$

8 Conservación de la energía mecánica

Cuando la fuerza es conservativa como sucede con la gravitatoria o la elástica de un muelle, entonces la masa que se encuentra sometida a la acción de la fuerza tiene energía potencial y al dejarla libre se puede poner en movimiento transformándose la energía potencial en cinética.

Supongamos que por la fuerza del campo una masa se traslada desde un punto *A* hasta otro *B.* El trabajo de la fuerza del campo se puede expresar según ec.(1.27) como $W_{A\to B} = -\left(U(B) - U(A)\right)$. Por otra parte según la ec.(1.26) el trabajo es igual a la variación de la energía cinética $W_{A\to B} = E_c(B) - E_c(A)$

Igualando las dos expresiones del trabajo:

$$-\left(U(B) - U(A)\right) = E_c(B) - E_c(A)$$

Y situando las energías de la partícula en *A en* un miembro y en *B* en el otro

$$E_c(A) + U(A) = E_c(B) + U(B) \qquad (1.29)$$

La suma de la energía cinética y potencial de una partícula en un punto, se llama energía mecánica y observamos que tiene igual valor en el punto *A* que en el *B*. *En conclusión: cuando una partícula se mueve bajo la acción de fuerzas conservativas su energía mecánica se mantiene constante.*

8.1 Oscilaciones

Como ejemplo de aplicación de la ecuación de conservación de la energía mecánica ec.(1.29) vamos a estudiar las oscilaciones que experimenta un muelle, (pues la fuerza elástica es conservativa), cuando estando vertical y en equilibrio con su longitud natural, se le suspende una masa *m*.

Tomaremos un origen de referencia $x_o = 0$ en la posición inicial *A,* de modo que al colgar la masa se mueve hasta otro punto *B*, de posición *x,* cuyo signo no prejuzgamos de antemano, fig.1.38. Después el muelle empieza a oscilar entre dos posiciones extremas, permaneciendo así indefinidamente.

Desde el punto de vista de la energía, la masa *m* modifica su energía potencial gravitatoria y cinética, mientras que el muelle varía la energía potencial elástica. Sobre la masa actúan el peso y la fuerza elástica del resorte que son conservativas, por lo que la energía mecánica del sistema se conserva y valdrá la mismo en *A* que en *B*.

$$U_A(\text{gra vitatoria}) + E_A(\text{cinética}) + U_A(\text{elástica}) = U_B + E_B + U_B$$

$$0 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0 = mgx + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$; \qquad \frac{1}{2}k\,x^2 + mg\,x + \frac{1}{2}m\,v^2 = 0$$

Existen dos posiciones del resorte en las que la velocidad es nula, *v = 0.*

$$\frac{1}{2}k\,x^2 + m\,g\,x = 0\,; \qquad \left(\frac{1}{2}k\,x + mg\right)x = 0$$

$$\text{Las soluciones son:} \qquad x_1 = 0\,; \qquad x_2 = -\frac{2\,m\,g}{k}$$

La masa unida al muelle oscila en línea recta entre las posiciones x_1 y x_2 equidistantes de una posición intermedia x_e; situada entre las dos.

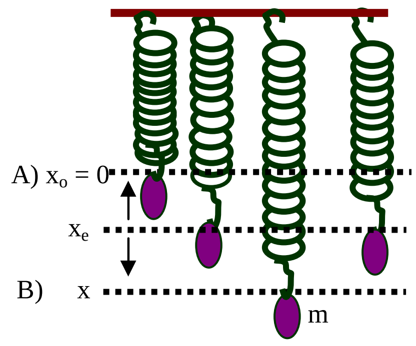
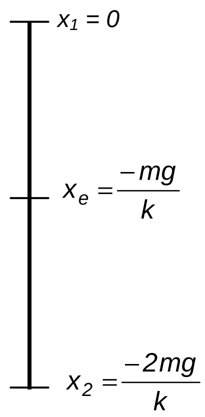


Fig.1.38 La distancia desde x_e hasta x_o o hasta x ; se llama amplitud.



Oscilaciones de la masa suspendida del muelle entre las posiciones x_1 y x_2.

Ejemplo 8.1

De un muelle cuya constante elástica es k = 200 N/m se cuelga una masa de 2 kg. Determina la distancia máxima que se separa de la posición inicial y la posición alrededor de la cual oscila.

En la posición más alejada de la inicial no tiene velocidad y la energía cinética es *0.*

$$[mg\,x\,] + \left[\frac{1}{2}\,kx^2\right] = 0\ ; \qquad \left[2\ kg \cdot 9{,}8\ \frac{N}{kg}\ x\ \right] + \frac{1}{2}\ 200\ \frac{N}{m}\ x^2 = 0$$

$$19{,}6\,x + 100\,x^2 = 0\ ; \qquad (19{,}6 + 100\,x)\,x = 0\ ; \qquad x_1 = 0; \qquad x_2 = -0{,}196\,m = -19{,}6\,cm$$

La posición central: $$x_e = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0 - 19{,}6cm}{2} = -\ 9{,}8\ \ cm$$

El muelle oscila arriba y abajo de x_e. La distancia de x_e, a cualquiera de las dos posiciones extremas, es la amplitud de la oscilación, $A = x_1 - x_e = 0 -(-9{,}8\ cm) = 9{,}8\ cm$.

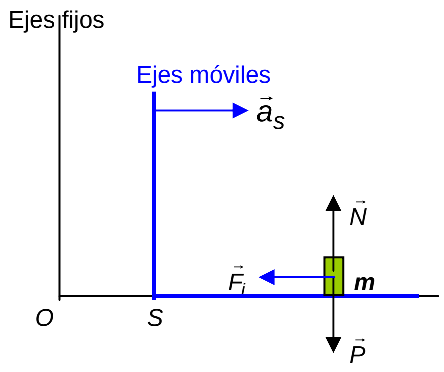


Fig.1.39. En el sistema inercial *O,* los ejes móviles en *S,* tienen una aceleración $\vec{a}_S$. Desde estos ejes se observa que sobre el cuerpo de masa ***m***, además de las fuerzas de interacción $\vec{N}$ y $\vec{P}$, aparece también la fuerza de inercia, cuyo sentido es contrario a la aceleración $\vec{a}_S$ del sistema no-inercial.

9 Fuerzas de inercia (no entran en el programa)

Cuando desde un sistema de referencia que se mueve con aceleración (llamado no-inercial), se quiere determinar la aceleración de un cuerpo, no es posible hacerlo mediante la ecuación de la Dinámica (1.9), pues solo es válida para observaciones desde sistemas inerciales y ahora debe ser cumplimentada con las fuerzas de inercia.

9.1 Los ejes se trasladan con aceleración rectilínea

Un observador situado en un sistema no inercial fig.1.39, que se desplaza en línea recta con una aceleración $\vec{a}_S$; para describir la Dinámica de un cuerpo de masa *m*, tiene que considerar que actúan sobre ella además de las fuerzas de interacción que determinaría un observador inercial, otra fuerza complementaria llamada fuerza de inercia, cuyo sentido es contrario al de la aceleración del sistema no-inercial, de modo que $\vec{F}_i = -m\,\vec{a}_S$.

Para calcular la aceleración $\vec{a}\,'$ que lleva la partícula respecto de los ejes no-inerciales, sumara vectorialmente las fuerzas de interacción con la fuerza de inercia resultando la ecuación:

$$m\,\vec{a}\,' = \sum \vec{F}(int\,eracción) + \vec{F}_i \qquad (1.30)$$

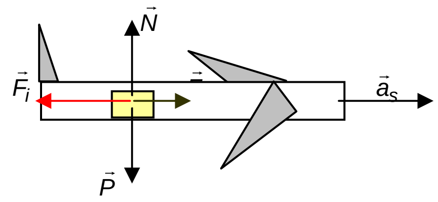


Fig.1.40. Sobre el bolso situado en el pasillo del avión que está acelerando actúan las fuerzas de interacción: $\vec{P}$, $\vec{N}$, $\vec{F}_R$ y la fuerza de inercia como consecuencia de que se halla en un sistema de referencia que tiene aceleración (el avión).

Ejercicio 9.1

Un bolso de masa m está en el pasillo de un avión que acelera a 4 m/s². Si el coeficiente de rozamiento es 0,3 determina la aceleración que lleva por el pasillo.

En la dirección perpendicular al pasillo actúan el peso y la reacción normal cuya resultante es nula *N – P = 0.* Sin embargo, en la dirección del pasillo están la fuerza de inercia F_i cuyo sentido es contrario a la aceleración a_s del avión y la fuerza de rozamiento F_R cuyo sentido es opuesto al del movimiento del bolso por el pasillo.

$N - P = 0; \qquad m\,a' = F_R - m\,a_s\,; \qquad m\,a' = \mu_e\,N - m\,a_s = \mu_e\,mg - m\,a_s$

$$a' = \mu_e\,g - a_s = 0{,}3 \cdot 9{,}8\ m/s^2 - 4\ m/s^2 = -1{,}06\ m/s^2$$

Para los pasajeros situados en el avión, el bolso se desplaza hacia la cola.

Ejemplo 9.2

Un dinamómetro de muelle está sujeto del techo de un ascensor. De éste cuelga un paquete de masa 5 kg. Un muchacho que se encuentra en el ascensor lee en el dinamómetro una fuerza de 49 N cuando está parado y de 46,5 N cuando éste arranca hacia abajo. Con esos datos determinar la intensidad de la gravedad y la aceleración del ascensor durante el arranque.

Como conocemos la masa del objeto y el peso en reposo, la intensidad g de la gravedad vale:

$$g=\frac{P}{m}=\frac{49\,N}{5\,kg}=9{,}8\,\frac{N}{kg}$$

Al ponerse el ascensor en marcha y acelerar hacia abajo, constituye un sistema no-inercial, por lo que sobre el paquete aparecerá una fuerza de inercia de sentido contrario, es decir hacia arriba fig.1.41. La tensión T de la cuerda es igual a la fuerza que marca el dinamómetro durante el arranque. Además, el paquete se encuentra en reposo respecto del ascensor de modo que la suma de todas fuerzas aplicadas incluida la de inercia es nula.

$$\vec{T}+\vec{P}+\vec{F}_i=0$$

El peso P apunta hacia abajo en el sentido de la aceleración del ascensor y le daremos signo positivo, mientras que la tensión y la fuerza de inercia lo hacen en sentido contrario, es decir hacia arriba y le asignamos el signo negativo. Con este convenio resulta la relación escalar.

$$P-T-m\,a_S=0\,;\qquad a_S=\frac{P-T}{m}=\frac{49\,N-46{,}5\,N}{5\,kg}=0{,}5\,\frac{m}{s^2}$$

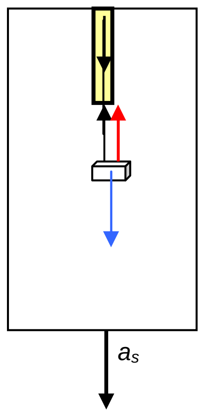


Fig.1.41. El ascensor arranca hacia abajo mientras que la fuerza de inercia que es de sentido contrario a la aceleración del ascensor, apunta hacia arriba.

9.2 Los ejes giran con una rotación uniforme

Cuando se trata de un sistema de referencia con ejes que están girando con velocidad angular constante $\vec{\omega}$; fig.1.40, éstos están sufriendo continuamente un cambio de dirección, lo que hace que sobre los ejes esté actuando una aceleración centrípeta. En consecuencia el sistema de ejes tiene aceleración y por lo tanto constituye un sistema no-inercial.

Sobre un cuerpo de masa m que se encuentra en el sistema actúan fuerzas de interacción, pero además aparece una fuerza de inercia que ahora se llama fuerza de inercia centrífuga $\vec{F}_{CT}$; cuya dirección es radial y su sentido hacia fuera "se fuga del centro". Su valor se calcula por la ecuación:

$$\vec{F}_{CT}=-m\,\omega^2\,R\,\vec{n}\qquad (1.31)$$

$\vec{n}$ es el vector unitario normal que en cada punto va hacia ***O´***, ω es la velocidad angular y R la distancia al eje de rotación. El módulo es $F_{CT}=m\omega^2 R$.

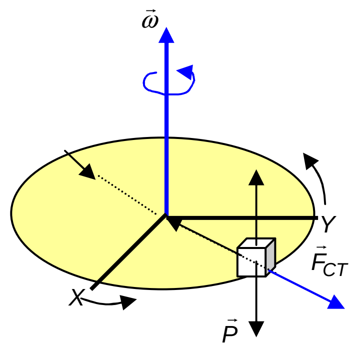


Fig.1.40. Sobre el cuerpo que se encuentra en reposo sobre la plataforma giratoria, además de las fuerzas de interacción: $\vec{N}$, $\vec{P}$, $\vec{F}_R$; actúa una fuerza de inercia debido a la rotación de los ejes llamada fuerza de inercia centrífuga F_{CT}.

Ejemplo 9.3

Colgando del techo de un vagón hay una bombilla de masa m, suspendida de un hilo que en una curva se desvía de la vertical y se inclina a la izquierda un ángulo de 15º, fig.1.41. La velocidad del tren es de 30 m/s. Calcula el radio de la curva.

Sobre la lámpara actúan las fuerzas de interacción, tensión del cable T y el peso P, además de la fuerza de inercia centrífuga F_{CT} cuyo sentido es hacia fuera de la curva, que este caso dobla a la derecha. De la figura se deduce:

$$tg\,\theta=\frac{F_{CT}}{P}=\frac{m\,\omega^2\,R}{m\,g}=\frac{v^2}{R\,g}\,;\ \text{con}\quad \omega=\frac{v}{R}\qquad R=\frac{v^2}{g\ \ tg\,\theta}=\frac{(30\,m/s)^2}{9{,}8\,m/s^2\ tg\,15º}=343\,m$$

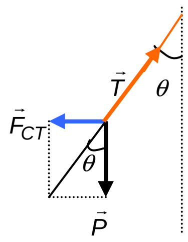


Fig.1.41 Fuerzas sobre la bombilla, observadas desde el interior del tren, al tomar éste una curva a la derecha.

9.3 Partícula móvil en unos ejes con rotación uniforme

Cuando un cuerpo de masa *m* se encuentra en un sistema de ejes que están girando con movimiento de rotación uniforme y además tiene movimiento respecto de ellos, es decir tiene una cierta velocidad, entonces para describir el movimiento del eje en los ejes que giran es necesario complementar la ecuación de la dinámica con unas fuerzas adicionales llamadas fuerza de inercia centrífuga y fuerza de inercia de Coriolis.

Supongamos una plataforma Fig.A, y en ella dos muchachos en reposo respecto de ella, uno en el centro *O* y otro en el borde en *P, coincidiendo con el eje Y*, siendo la distancia entre ellos el radio *R*. Supondremos que la superficie de la plataforma está muy pulida y no presenta rozamiento, de modo que cuando está parada, si desde *O* se lanza una canica hacia *P*, ésta se desplazará en línea recta y con velocidad constante v_0. fig.1.42.

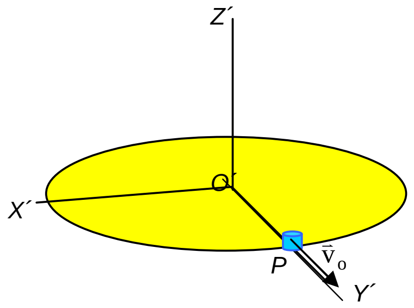


Fig.1.42 Cuando la plataforma no gira los ejes situados en ella están fijos y la trayectoria seguida por el disco desde *O´* hasta *P* es una recta.

Supongamos ahora que la plataforma se pone en rotación y que cuando ha adquirido movimiento circular uniforme $\vec{\omega} = cte,$ se lanza de nuevo el disco con velocidad v_0 desde O hacia P. Un observador que esté fuera de la plataforma, en unos ejes inerciales, verá que la bolita sigue una línea recta con velocidad constante, al no haber rozamiento con la plataforma. Pero ahora, el disco no acaba en manos del destinatario en *P,* sino que alcanza el borde en un punto *Q* situado a la izquierda de *P*, Fig. A y fig.1.43. Para el observador que está en P, en reposo respecto de la plataforma, la trayectoria que sigue la canica respecto de sus ejes está curvada. Por ejemplo, si estuviera recubierta de pintura fresca, dejaría sobre el piso de la plataforma unas “marcas” que corresponden a la trayectoria curvada que se representa en la fig.143.

El observador que está en la plataforma, en los ejes no inerciales, tiene dificultades para explicar la causa de esta desviación en la trayectoria. Y como no hay otras fuerzas (el rozamiento es nulo), si quiere explicar el comportamiento anómalo de la canica mediante la ecuación dinámica debe admitir que todo ocurre “como si” sobre ella actuara una fuerza “ficticia”, llamada fuerza de inercia, debido a la rotación de la plataforma. Su valor se podría determinar del modo siguiente.

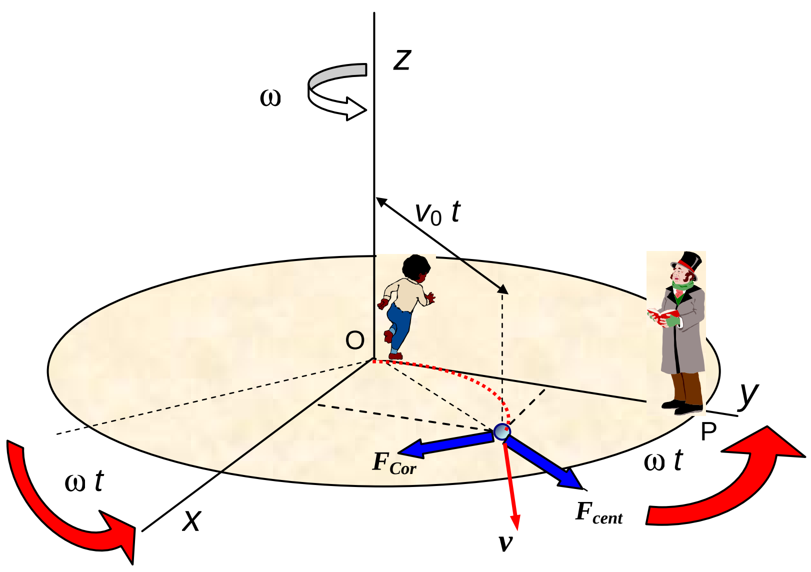


Fig. A

El observador que está en reposo respecto de los ejes que giran determina las coordenadas (*x, y*) de la “canica” y por lo tanto su vector de posición

$$\vec{r} = v_0 t\,\mathrm{sen}(\omega t)\,\vec{i} + v_0 t\cos(\omega t)\,\vec{j} \quad ,$$

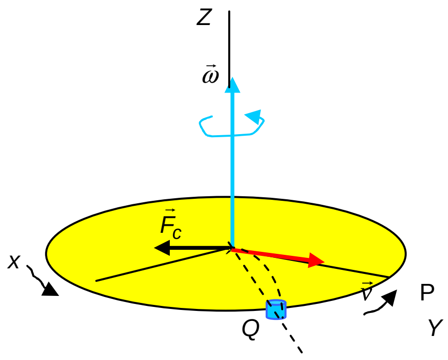


Fig1.43. Cuando la bolita se mueve respecto de la plataforma la fuerza de Coriolis la desvía de la trayectoria rectilínea. En la figura se ha dibujado de puntos.

A continuación derivando sucesivamente respecto del tiempo la expresión anterior se obtiene la velocidad y aceleración de la canica respecto de los ejes que giran

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_0(\mathrm{sen}(\omega t)\,\vec{i} + \cos(\omega t)\,\vec{j}) + v_0 t(\omega\cos(\omega t)\,\vec{i} - \omega\,\mathrm{sen}(\omega t)\,\vec{j}) =$$

$$= v_0\frac{\vec{r}}{r} - \omega\vec{k}\wedge\vec{r} \quad ,$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = v_0(\omega\cos(\omega t)\,\vec{i} - \omega\,\mathrm{sen}(\omega t)\,\vec{j}) - \omega\vec{k}\wedge\frac{d\vec{r}}{dt} =$$

$$-\omega\vec{k}\wedge\frac{v_0\vec{r}}{r} - \omega\vec{k}\wedge\vec{v} = \omega^2\vec{r} - 2\omega\vec{k}\wedge\vec{v} \quad ,$$

Las cosas ocurren como si actuara una fuerza sobre la canica de valor igual al producto de la masa de ésta por su aceleración

$$m\vec{a} = m\omega^2\vec{r} - 2m\omega\vec{k}\wedge\vec{v} \equiv (\vec{F}_I)_{cent} + (\vec{F}_I)_{Cor}$$

Se llama fuerza de inercia centrífuga a la expresión

$$(\vec{F}_I)_{cent} = m\omega^2\vec{r} \ ,$$

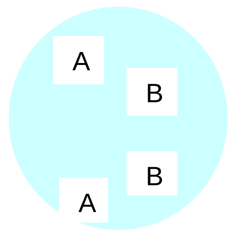


Fig.1.43. Debido a la fuerza de Coriolis la circulación de los vientos entre las zonas de alta y baja presión giran en sentido contrario en el hemisferio Norte que en el hemisferio Sur.

y fuerza de inercia de Coriolis a

$$(\vec{F}_I)_{Cor} = -2m\omega\vec{k}\wedge\vec{v} \quad ,$$

La fuerza de inercia centrífuga tiene la dirección radial y dirigida hacia el exterior. La fuerza de Coriolis por resultar de un producto vectorial, es perpendicular al plano que forman los vectores $\vec{\omega}$ y $\vec{v}$, por lo tanto está en el plano *XY* de la fig.1.43. Su módulo es:

$$F_{Cor} = 2\ m\ \omega\ v\ \mathrm{sen}\ 90^{\circ} = 2\ m\ \omega\ v$$

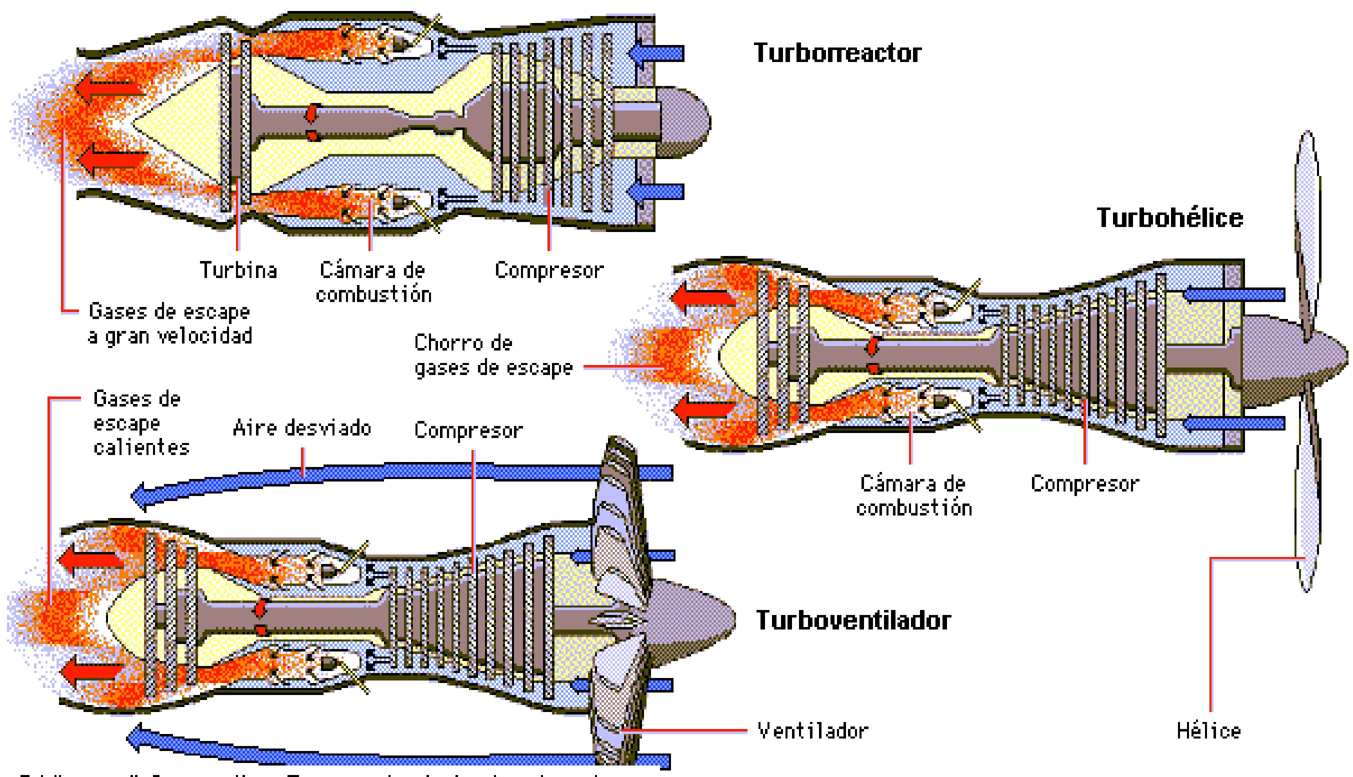
La fuerza de Coriolis es de gran importancia en nuestro planeta, pues la Tierra está girando alrededor de su eje de rotación y sobre todos los objetos que se mueven en el planeta excepto aquellos que lo hacen en una dirección paralela al eje terrestre aparece la fuerza de Coriolis desviándolos de su trayectoria. Así por ejemplo, los movimientos en espiral del aire atmosférico son debidos a esta fuerza, las corrientes de aire se desvían hacia la derecha en el hemisferio Norte y hacia la izquierda en el Sur, fig.1.43.
El efecto de Coriolis es muy importante para los cohetes y los satélites artificiales que se desplazan a gran velocidad respecto de la Tierra.

PROPULSIÓN A CHORRO Y COHETES

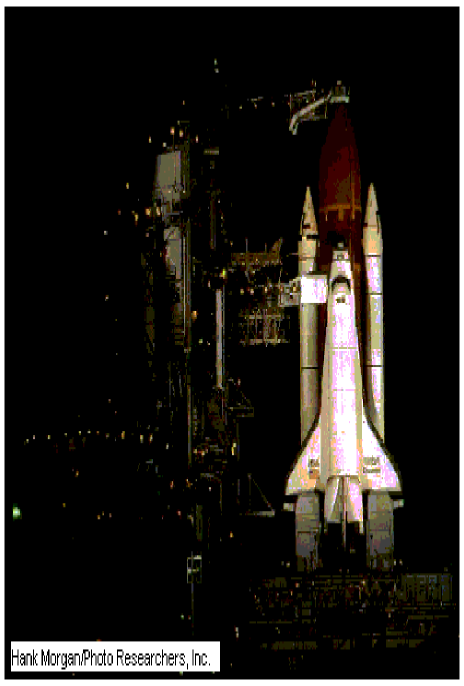
Se conoce como propulsión a chorro, el procedimiento por el que se impulsa hacia delante un móvil, por reacción a la expulsión hacia atrás, de un chorro de fluido (gas o líquido) a gran velocidad. El fundamento físico de la propulsión está en la tercera ley de Newton, ya que al ser lanzada una masa fluida hacia atrás por acción de una fuerza, provoca otra fuerza de reacción en el reactor (recinto donde tiene lugar una reacción) en sentido hacia delante.

Como símil puede servir un globo de goma, si después de hinchado se deja que salga repentinamente el aire, pues constituye un sencillo ejemplo de la propulsión a chorro. Mientras se encuentra cerrada la boquilla, la presión del aire dentro del globo es la misma en todas direcciones, pero cuando se abre y el aire empieza a salir, la presión que experimenta el globo es menor en la boquilla que en el resto del globo lo que hace que el aire de dentro escape por la misma, sufriendo su parte delantera una reacción que lo hace salir despedido hacia adelante.

Un motor a reacción no funciona de forma tan simple como un globo, aunque el principio básico sea el mismo. Este principio de la Física es el principio de conservación de la cantidad de movimiento entre el vehículo que se desea mover y las partículas del chorro de gas que son expulsadas a alta velocidad. Es el que ha permitido el desarrollo de la tecnología que se aplica en los motores de reacción, que es la misma que se adapta a la propulsión de los cohetes capaces de poner en órbita a los satélites artificiales y mandar a explorar el espacio exterior, a hombres y máquinas.



Para lograr mucha impulsión es necesario proporcionar gran aceleración al chorro de gases que es expelido al exterior del reactor, para que de este modo adquieran sus partículas mucha velocidad. Esto se consigue quemando en la cámara de combustión un combustible muy energético, para lo que es necesario utilizar un oxidante como es el oxígeno del aire que se inyecta en la cámara junto con el combustible a alta presión. Entre los motores que dependen de la atmósfera para el suministro de oxígeno (motores atmosféricos) se encuentran los turborreactores, los turboventiladores, las turbohélices, etc.



Para los motores de reacción de los cohetes que tienen que funcionar a capas altas de la atmósfera o fuera de la misma, el propio vehículo debe transportar el combustible y el oxidante, llevándolos como líquidos a alta presión o en estado sólido, en cámaras separadas. Estos motores son los usados desde los comienzos de la carrera espacial.

Como la velocidad de los vehículos que transportan estos motores depende de la masa de gas expelido y de la velocidad v_0 con que abandonan el reactor, es interesante escribir la ecuación física que relaciona la masa m del cohete en cada instante, con la velocidad v del mismo. Debes entender que la masa del vehículo va variando continuamente a medida que se va quemando el combustible y los gases son expulsado a chorro del reactor. Si la masa inicial del cohete incluido el combustible es m_0 la ley física que estamos considerando es:

$$\frac{m}{m_0} = e^{-v/v_0}$$

Una reflexión inmediata que resulta de la observación de esta ley, es que en el primer miembro se encuentra una relación entre la masa que hay en cada instante m y la masa inicial m_0. En el segundo miembro hay una exponencial con la relación entre dos velocidades, la de expulsión de las partículas v_o y la que en cada instante tiene el vehículo v. Esta ley significa que para conseguir una velocidad del vehículo que sea por ejemplo, unas cinco veces mayor que la velocidad de expulsión de las partículas gaseosas $v / v_o = 5$; la masa debe ser cuando se produce el lanzamiento:

$m = m_0\, e^{-5} = 6{,}74.10^{-3}\, m_0$; o bien la masa inicial será: $m_0 = 148\ m$

Es decir, para que la velocidad del cohete alcance un valor 5 veces superior a la de los gases de escape, necesita una masa inicial 148 veces superior a la que tiene en ese instante. O de otro modo, por cada kilogramo de combustible inicial, le quedarán solamente $\frac{1}{148} \approx 7\ g$.

Para poner en órbita terrestre a un satélite es necesario que alcance una velocidad de unos *8 km/s*. La velocidad de salida de las partículas del chorro de gas incandescente que expulsa el cohete, no puede ser mayor de *1,9 km/s;* por ser una función de la temperatura alcanzada en la cámara de combustión que se elevaría por encima de los *3000ºC,* y resulta poco viable técnicamente construir cámaras de combustión que soporten mayores temperaturas sin peligro de fusión.

Para el futuro se está investigando sobre el uso de otros motores de propulsión pensando en los viajes espaciales a grandes distancias que puedan utilizar la energía nuclear de fisión y de fusión. Estos cohetes han de lanzarse desde plataformas espaciales, a las que habrá que llegar con los cohetes de motores a propulsión de diseño similar al actual.

Otras posibilidades están en cohetes con motores de plasma iónico, electrostáticos y electromagnéticos.