Movimiento ondulatorio

Movimiento ondulatorio. Tipos de ondas

Ondas longitudinales y transversales

Magnitudes características de las ondas

Velocidad de propagación
Relación de la longitud de onda con la velocidad de propagación
Número de onda *k*

Ecuación de las ondas armónicas, unidimensionales

Análisis de las ecuaciones de una onda Otras ecuaciones de las ondas armónicas

Otras ecuaciones de las ondas armónicas

El movimiento ondulatorio es periódico en el espacio y en el tiempo

Propagación de ondas, en dos y tres dimensiones

Principio de Huygens
Fenómenos producidos al propagarse las ondas
Reflexión
Refracción
Difracción de ondas
Polarización de ondas transversales
Ondas estacionarias

Intensidad del movimiento ondulatorio

Ondas sonoras

Características del sonido
Fuentes de sonidos musicales

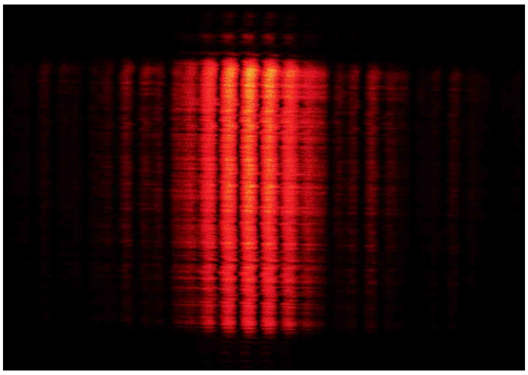


IMAGEN DE LAS INTERFERENCIAS PRODUCIDAS POR DOS RENDIJAS PARALELAS.

Movimiento ondulatorio. Tipos de ondas

Nuestro conocimiento de la Naturaleza se basa principalmente en las ondas. Observamos los objetos por la luz que reflejan o emiten, nos comunicamos oralmente por medio de sonidos, transmitimos información e imágenes a distancia. Incluso el comportamiento de las partículas elementales, de los átomos y de las moléculas, que forman la materia, no se puede entender sin considerar su carácter ondulatorio. Existen ondas de distinta naturaleza como las electromagnéticas y las mecánicas.

Las ondas electromagnéticas están formadas por campos eléctricos y magnéticos que se propagan simultáneamente a través del vacío o en determinados medios materiales. La luz tiene esta naturaleza y en general todo el espectro electromagnético que estudiaremos más adelante. Los científicos buscan la evidencia experimental de las ondas de gravitación, producidas por variaciones de los campos gravitatorios, cuando estas perturbaciones se producen periódicamente.

Las ondas mecánicas son aquellas que necesitan un medio material como soporte para su propagación, entre éstas citaremos: el sonido, las ondas que se propagan en el agua y las ondas sísmicas que producen la deformación del suelo, como cuando se produce un terremoto.

En esta unidad centraremos nuestra atención en las ondas mecánicas, sin embargo ciertos conceptos como longitud de onda, frecuencia y periodo, son válidos para todas las ondas con independencia de su naturaleza.

La propagación de las ondas mecánicas por un medio material requiere la existencia de partículas con masa (por tanto con inercia), y la existencia de una fuerza recuperadora entre las partículas del medio, que tienda a restaurarlas a la posición de equilibrio. De este modo a medida que las partículas son alcanzadas por la onda efectuarán un movimiento vibratorio. *La propagación de una onda mecánica por un medio material, supone una transmisión de energía por el mismo sin que exista transporte de materia.*

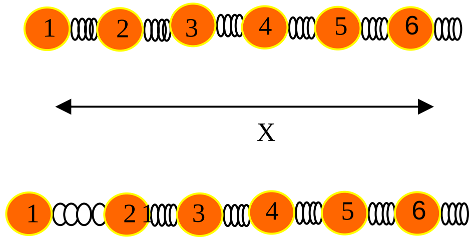


Fig.5.1. **Modelo para las ondas longitudinales.**
Si se hace oscilar a la bola 1 en la dirección del eje X, con un m.a.s., al estirarse y comprimirse el muelle que la separa de la bola 2, también se va a ir transmitiendo a ésta la vibración, de modo que empieza a vibrar un cierto tiempo más tarde. De este modo la vibración va propagándose paso a paso, a todas las bolas del medio, en la misma dirección de propagación de la perturbación (en nuestro caso el eje X).

Ondas longitudinales y transversales

Para explicar la formación y la propagación de las ondas mecánicas longitudinales y transversales, vamos a considerar un modelo, constituido por un medio material formado por partículas situadas a lo largo del eje X, entre las que están actuando fuerzas de naturaleza elástica. En la Naturaleza, las fuerzas elásticas entre las partículas, las proporcionan interacciones de naturaleza electromagnética.

Movimiento ondulatorio longitudinal. Se produce cuando las partículas del medio oscilan paralelamente a la dirección de propagación de la perturbación. Un modelo mecánico para la propagación de ondas longitudinales puede ser un conjunto de bolas separadas por muelles, que al estirarse o comprimirse, proporcionan la fuerza elástica, fig.5.1.

Para ver como se propaga la onda longitudinal por un medio material mostraremos diversas imágenes del mismo, fig.5.2, pero sin dibujar los muelles entre las partículas, para simplificar el esquema. Solo se toman 5 partículas para poder seguir sus vibraciones y éstas se inician en la partícula situada en 1, para después mostrar el estado del medio a intervalos de tiempo iguales, a la cuarta parte del periodo, es decir de $T/4$ en $T/4$, que es el tiempo que tarda una partícula en pasar de la posición de equilibrio, a una posición extrema o viceversa. Las partículas 1 y 5, que

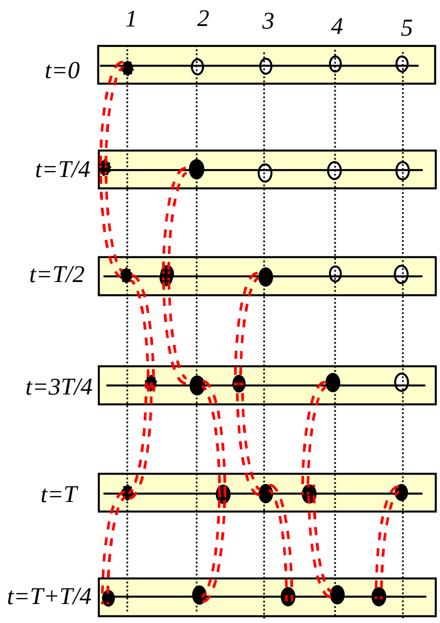


Fig.5.2. Propagación de ondas longitudinales.
La partícula 1 va realizando un m.a.s. horizontal, cuyas posiciones representamos en distintos instantes de tiempo. Este movimiento vibratorio se va propagando con retraso a las otras partículas. Las líneas verticales permiten observar las posiciones de equilibrio y las partículas en negro indican que están en vibración.

empiezan a oscilar con una diferencia de tiempo de un periodo T, lo hacen en igualdad de fase (observa que van coordinados sus movimientos).

Longitud de onda. Es la distancia entre dos partículas consecutivas que oscilan en fase, medida en la dirección de propagación del movimiento ondulatorio, se representa por λ (lambda) y en la fig.5.2, es la distancia entre las partículas 1 y 5. También se puede definir como la distancia que avanza la onda en un periodo de tiempo T.

Durante el tiempo en el que la partícula situada en el foco de la perturbación (la 1), efectúa una vibración completa, en el medio se produce una onda.

Observa que a medida que se propaga la onda longitudinal, las partículas del medio se aproximan y después se separan, así en la fig.5.2, en el instante $t = 3T/4$, las partículas 1, 2 y 3; están muy próximas, mientras que en el instante *t = T + T/4* , están muy separadas. Al propagarse una onda longitudinal las partículas del medio se comprimen y se expanden continuamente, se conoce también como una onda de presión.

Las ondas longitudinales, se propagan en los sólidos, líquidos y gases.

Movimiento ondulatorio transversal. Se produce cuando las partículas del medio vibran en una dirección perpendicular a la de propagación de la perturbación. Un modelo mecánico para la propagación de las ondas transversales le constituye el conjunto de bolas y muelles de la fig.5.3. en el que los muelles proporcionan las fuerzas elásticas necesarias para la propagación de la onda según el eje *X.*

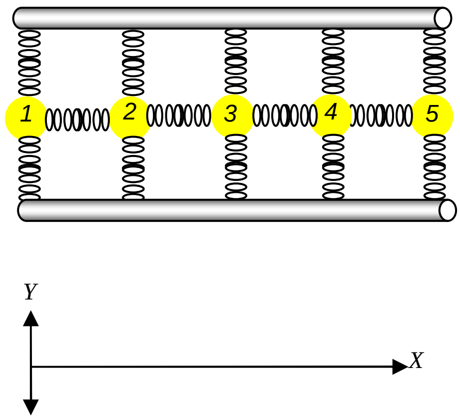


Fig.5.3. Modelo para las ondas transversales.
Al hacer oscilar a la bola 1, en dirección vertical, según el eje Y, la perturbación se propaga horizontalmente a las demás bolas, por el eje X, empezando a vibrar un cierto tiempo más tarde. Cuando las partículas del medio vibran perpendicularmente a la de propagación de la onda, se llama *onda transversal*.

Para mostrar la propagación de la onda transversal por un medio material haremos varias representaciones del mismo, fig.5.4, pero sin dibujar los muelles entre las partículas, para simplificar el esquema. Considerando que a la partícula situada en 1 la obligamos a oscilar con m.a.s., en la dirección del eje Y, vamos a mostrar el estado del medio a intervalos de tiempo iguales a un cuarto del periodo, es decir de $T/4$ en $T/4$, fig.5.4.

Cuando la partícula 1, situada en el foco de la perturbación, ha efectuado una vibración completa, en el medio se ha propagado una onda. *La longitud de onda* λ, es la distancia entre dos partículas consecutivas que vibran en concordancia de fase, fig.5.5. Es la distancia entre las partículas 1 y 5.

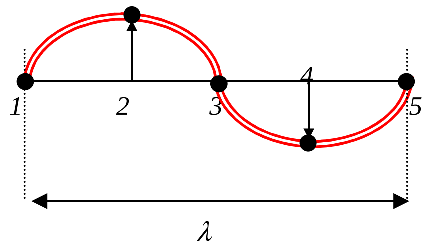


Fig.5.5. Longitud de onda λ

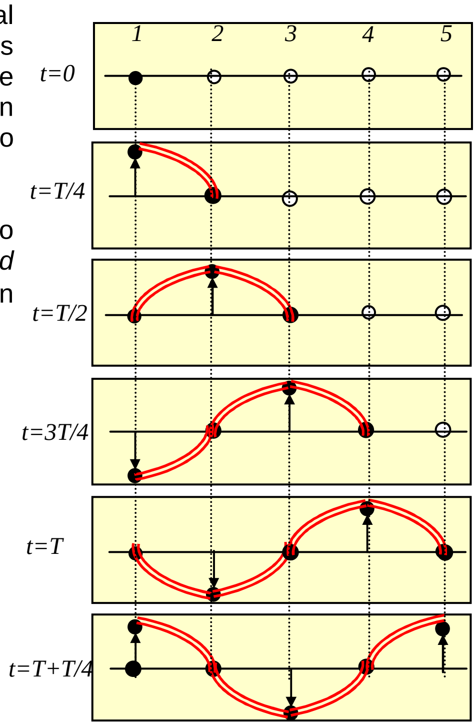


Fig.5.4. Propagación de ondas transversales. Se han unido con una curva las posiciones de las partículas en distintos instantes de tiempo. Observa que al cabo de un periodo $t = T$, se ha producido en el medio una onda completa.

Fíjate en la fig.5.4, como la partícula 5, que comienza a vibrar un periodo de tiempo más tarde que la 1, vibra con ella en concordancia de fase.

Las ondas transversales se propagan en los sólidos, y en también en la superficie del agua, debido al efecto de la gravedad y de una fuerza entre las moléculas situadas en la superficie del agua, llamada tensión superficial. Sin embargo, no se puede propagar en los gases, debido a la pequeña interacción elástica entre sus partículas.

Magnitudes características de las ondas

La amplitud A de la onda, coincide con la de vibración de las partículas. El periodo T, es el tiempo en el que una partícula efectúa una vibración completa. La frecuencia f, es el número de ondas completas que pasan por un punto del medio durante un segundo de tiempo. La frecuencia angular $\omega = 2\pi f$ y la longitud de onda λ, han sido definidas anteriormente.

Definiremos la velocidad de propagación de la onda por un medio y su relación con la longitud de onda, periodo y frecuencia. Además se introducirá una nueva magnitud, designada como el número de onda k.

Velocidad de propagación

La posibilidad de que una onda se propague o no por un medio, depende de la naturaleza del mismo en función de sus propiedades elásticas. Si éstas no varían en todo el medio, la onda avanza con velocidad constante.

Nos limitaremos a estudiar las ondas transversales que se transmiten en una cuerda y las longitudinales que se propagan por un gas como el aire.

Velocidad de propagación de una onda transversal en una cuerda

Consideremos una cuerda fija por un extremo a una pared, de modo que después de pasar por una polea cuelga del otro extremo un peso, fig.5.6. Si la cuerda tiene un espesor pequeño frente a su longitud L, y su masa es m, se define la densidad lineal μ, como la masa de cada unidad de longitud.

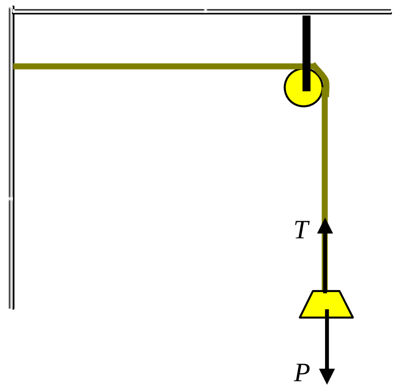


Fig.5.6. Cuerda tensada por sus extremos, en la que puede propagarse una onda transversal.

$$\mu = \frac{m}{L}; \quad \text{cuyas unidades son} \quad \frac{kg}{m}$$

Como la cuerda está en equilibrio, la tensión de la cuerda es igual al peso del cuerpo colgado $T = P$. Se demuestra que la velocidad de una onda transversal en una cuerda tensa, se calcula mediante la raíz cuadrada de la tensión partido por la densidad lineal, es decir por la ecuación:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad [5.1]$$

Velocidad de propagación de una onda longitudinal en el aire

Las ondas longitudinales como el sonido, se propagan en los sólidos, líquidos y gases. En las sustancias gaseosas, la velocidad depende de la temperatura absoluta T del gas y de magnitudes como la masa molecular M, la constante de los gases R y el tipo de moléculas gaseosas (monoatómicas o diatómicas).

Para el aire que es un gas formado por moléculas diatómicas, la velocidad de propagación de una onda longitudinal, se determina por la ecuación:

$$v = \sqrt{\frac{1{,}4\,R\,T}{M}} \qquad [5.2]$$

Para el aire seco: $M = 29{,}0.10^{-3}\,\frac{kg}{mol}$; Constante de los gases: $R = 8{,}31\,\frac{J}{mol \cdot K}$

Relación de la longitud de onda con la velocidad de propagación

Cuando una onda se propaga por un medio homogéneo y que además tiene iguales propiedades en todas direcciones, entonces su velocidad v es constante. Como la longitud de onda λ, se ha definido como la distancia que avanza la onda en un periodo *T,* se puede expresar como el producto de la velocidad v por el periodo T, es decir.

$$\lambda = v \cdot T \qquad [5.3]$$

En función de la frecuencia: $\lambda = v \cdot \frac{1}{f} = \frac{v}{f}$ [5.4]

Al pasar una onda desde un medio a otro distinto, no cambian ni el periodo ni la frecuencia, pero si lo hace la longitud de onda al variar la velocidad.

Número de onda *k*

El número de onda k, es un parámetro muy útil para la descripción matemática del movimiento ondulatorio. Se define como el valor recíproco de la longitud de onda λ, multiplicado por 2π.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad [5.5]$$

Las unidades de k *son* m^{-1}

También puede relacionarse mediante la ec. [5.4] con la frecuencia y la velocidad de la onda.

$$k = \frac{2\pi}{v/f} = \frac{2\pi f}{v} = \frac{\omega}{v} \qquad [5.6]$$

La ecuación anterior permite relacionar también, el número de onda k, con la frecuencia angular ω

Ejemplo

Una cuerda tiene una masa m = 90 g y una longitud de 4 m. Se cuelga de un extremo un cuerpo de masa m_1 = 200 g, como en la fig.5.6. Determina: a) Si se hace vibrar la cuerda transversalmente la velocidad de la onda transversal que se propaga por la cuerda.
b) Si la frecuencia de vibración es de 10 Hz, el valor de la longitud de onda.
c) El valor que toma el número de onda.
a) La densidad lineal vale:

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{0{,}09\,kg}{4\,m} = 0{,}0225\,\frac{kg}{m}$$

La velocidad: $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{P}{\mu}} = \sqrt{\frac{m_1 \cdot g}{\mu}} = \sqrt{\frac{0{,}2\,kg \cdot 9{,}8\,m/s^2}{0{,}0225\,kg/m}} = 9{,}3\ m/s$

b) La longitud de onda es: $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{9{,}3\ m/s}{10\ vibraciones/s} = 0{,}93\ m$

c) El número de onda es: $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\,rad}{0{,}93\ m} = 6{,}8\ \ rad \cdot m^{-1}$

Ejemplo

a) Determina la velocidad de una onda longitudinal en el aire cuando su temperatura es de 25 ºC.
b) Si se trata de la nota La, cuya frecuencia es de 440 Hz, determina el valor de la longitud de onda.

a) La velocidad se obtiene de aplicar [5.2]

$$v=\sqrt{\frac{1{,}4\ RT}{M}}=\sqrt{\frac{1{,}4\cdot 8{,}31\frac{J}{mol\cdot K}\cdot(273+25)K}{29.10^{-3}\ kg/mol}}=\sqrt{119\,549\frac{m^2}{s^2}}=346\ \frac{m}{s}$$

b) La longitud de onda es de ec. [5.4]

$$\lambda=\frac{v}{f}=\frac{346\ m/s}{440/s}=0{,}79\ m$$

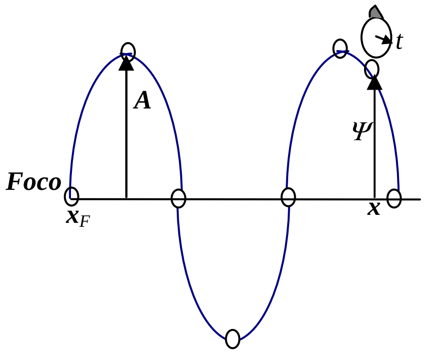


Fig.5.7. El estado vibratorio *Ψ,* de una partícula situada en un punto *x* del medio, en cualquier instante de tiempo *t*, es una función de dos variables, la posición de la partícula y del tiempo:

$\psi = f\,(x,t).$

Con *A* se representa la amplitud de vibración de las partículas del medio.

Ejemplo

El sonido emitido con la nota La, se propaga a continuación por una masa de aire que se encuentra a 15 ºC. ¿Habrá variado la longitud de onda?.

a) Calcularemos primero la nueva velocidad de propagación.

$$v=\sqrt{\frac{1{,}4\ RT}{M}}=\sqrt{\frac{1{,}4\cdot 8{,}31\frac{J}{mol\cdot K}\cdot(273+20)K}{29.10^{-3}\ kg/mol}}=\sqrt{115\,538\frac{m^2}{s^2}}=340\ \frac{m}{s}$$

b) La longitud de onda variará, al cambiar la velocidad de propagación como consecuencia del cambio de temperatura del aire.

$$\lambda=\frac{v}{f}=\frac{340\ m/s}{440/s}=0{,}77\ m$$

Ecuaciones de las ondas armónicas, unidimensionales

Cuando una onda se propaga por un medio, fig.5.7, sus partículas entran en vibración con un cierto retraso, respecto de la partícula situada en el foco de la perturbación x_F, que es el lugar donde se inicia el movimiento ondulatorio.

La ecuación de un movimiento ondulatorio determina el estado vibratorio de cualquier partícula del medio, *x*, en cualquier instante de tiempo *t*. La magnitud de la oscilación, la medimos en cada punto y en cada instante, por la función *Ψ (Psi)*, fig.5.7.

Considerando un conjunto de partículas situadas en línea recta (medio unidimensional), cada partícula empieza a vibrar en un instante determinado, que dependerá de su distancia al foco x_F.

Para determinar la ecuación de la onda consideramos que la partícula en el *Foco*, fig.5.8, cuya situación es x_F , empieza a vibrar en el instante $t = 0$, con un m.a.s., de amplitud *A*, y frecuencia angular *ω*, desde un punto separado de la posición de equilibrio, por lo que hay que incluir una fase inicial θ_o . Aplicando la ecuación de una m.a.s. y llamando *Ψ* a la elongación, resulta para la partícula situada en el foco de la perturbación:

$$\Psi = A\,sen\,(\omega t+\theta_o)$$

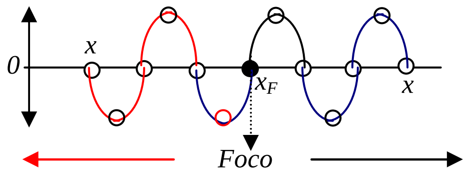


Fig.5.8. La onda producida en el *Foco*, se propaga en los dos sentidos, hacia la derecha y hacia la izquierda del eje *X*, con igual velocidad.

Si la onda se propaga hacia la derecha de x_F con una velocidad v, una partícula situada en un punto x, empezará a vibrar en un instante t', igual al tiempo que ha tardado la onda en alcanzarla desde el foco. En consecuencia:

$$t' = \frac{desplazamiento}{velocidad} = \frac{x - x_F}{v}$$

De modo que cuando la partícula en el *Foco* lleve vibrando un tiempo t, la situada en x, llevará vibrando un tiempo menor de valor $(t - t')$. El estado vibratorio de esta partícula vendrá dado por la ecuación:

$$\Psi = A\, sen\left[\omega\left(t - t'\right) + \theta_0\right]$$

Sustituyendo t' obtenemos la ecuación del movimiento ondulatorio que se propaga hacia la derecha del eje X, es decir hacia los valores de $x > x_F$.

$$\Psi = A sen\left[\omega\left(t - \frac{x - x_F}{v}\right) + \theta_o\right] = A sen\left[\omega\left(t - \frac{x}{v} + \frac{x_F}{v}\right) + \theta_o\right]$$

La expresamos en función del periodo T y de la longitud de onda .λ

$$\Psi = A sen\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{T v} + \frac{x_F}{T v}\right) + \theta_o\right] = A sen\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \frac{x_F}{\lambda}\right) + \theta_o\right] \qquad [5.7]$$

Si la onda tiene sentido de propagación hacia la izquierda, es decir hacia los valores decrecientes de X, resulta que su velocidad tiene signo negativo, $-v$. El tiempo que tarda en llegar a un punto x, tal que $x < x_F$, será:

$$t' = \frac{desplazamiento}{velocidad} = \frac{x - x_F}{-v} = \frac{-\left(x - x_F\right)}{v}$$

Sustituyendo t' resulta ahora:

$$\Psi = A sen\left[\omega\left(t - \frac{-\left(x - x_F\right)}{v}\right) + \theta_o\right] = A sen\left[\omega\left(t + \frac{x}{v} - \frac{x_F}{v}\right) + \theta_o\right]$$

En función del periodo y de la longitud de onda.

$$\Psi = A sen\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{T v} - \frac{x_F}{T v}\right) + \theta_o\right] = A sen\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} - \frac{x_F}{\lambda}\right) + \theta_o\right] \qquad [5.8]$$

Estas ecuaciones también se pueden expresar en función de la frecuencia angular, $\omega = 2\pi/T$ y del número de onda, $k = 2\pi/\lambda$, resultando:

Onda hacia la derecha $\longrightarrow$ $\quad \Psi = A sen\left[\left(\omega t - k x + k x_F\right) + \theta_o\right] \qquad [5.9]$

Onda hacia la izquierda $\longleftarrow$ $\quad \Psi = A sen\left[\left(\omega t + k x - k x_F\right) + \theta_o\right] \qquad [5.10]$

Análisis de las ecuaciones de una onda

a) ***Cuando el foco está situado en el origen*** $x_F = 0$ ***y si las vibraciones se inician desde la posición de equilibrio*** $\theta_o = 0$. Sustituyendo estos valores en las ecuaciones [5.7], [5.8], [5.9] y [5.10] quedan muy simplificadas:

- Onda, cuyo sentido de propagación es hacia la derecha del eje X:

$$\Psi = A sen\ 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad [5.11]$$

$$\Psi = A sen\ (\omega t - k\,x) \qquad [5.12]$$

- Onda, cuyo sentido de propagación es hacia la izquierda del eje X:

$$\Psi = A sen\ 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) \qquad [5.13]$$

$$\Psi = A sen\ (\omega t + k\,x) \qquad [5.14]$$

Ejemplo

La amplitud de vibración de las partículas de la cuerda que se utilizó en el ejemplo 1, es de 5 cm. Determina:
a) La ecuación del movimiento ondulatorio que se propaga por la cuerda. b) La ecuación del movimiento vibratorio de una partícula de la cuerda, situada en el punto $x = 2$ m. *c) La elongación en el instante* $t = 1{,}2$ s

a) Para utilizar la ec.[5.11] necesitamos el periodo y la longitud de onda que ya conocemos del ejemplo 1:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{10\,Hz} = 0{,}1\,s \qquad \lambda = 0{,}93\ m \qquad \Psi = 5.10^{-2}\ sen\,2\pi\left(\frac{t}{0{,}1} - \frac{x}{0{,}93}\right)$$

Para utilizar la ec.[5.12] hacen falta la frecuencia angular ω y el número de onda k:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 10 = 20\pi\ rad/s; \qquad k = 6{,}8\ rad\cdot m^{-1}; \qquad \Psi = 5.10^{-2}\ sen(20\pi\ t - 6{,}8\,x)$$

b) Para $x_F = 2\ m$;

$$\Psi\ (2,t) = 5.10^{-2}\ sen(20\pi t - 6{,}8 \cdot 2) = 5.10^{-2}\ sen\ (20\pi t - 13{,}6)$$

c) Para $t = 1{,}2\ s$

$$\Psi\ (2{,}1{,}2) = 5.10^{-2}\ m\ sen\ (20\pi \cdot 1{,}2 - 13{,}6)\,rad = 5.10^{-2} m\ \ sen(\ 61{,}8\ \ )\ rad = -\,0{,}04\,m$$

Ecuación de la onda en función del coseno

Se pueden expresar también las ecuaciones del movimiento ondulatorio mediante la función coseno. En efecto, la ecuación deberá verificar que cuando el foco está en el origen $x_F = 0$ y la partícula en la posición de equilibrio $\theta_o = 0$; deberá cumplirse que $\Psi = 0$; en el instante $t = 0$. Empleando el coseno, es necesario añadir una fase inicial de $-\pi/2$. Recuerda de la trigonometría que, $sen\ \alpha = cos\ (\alpha - \pi/2)$.

- Onda que viaja hacia la derecha en función del coseno:

$$\Psi = A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)-\frac{\pi}{2}\right] \qquad [5.15]$$

$$\Psi = A\cos\left(\omega t - k\,x - \frac{\pi}{2}\right) \qquad [5.16]$$

- Onda que viaja hacia la izquierda en función del coseno:

$$\Psi = A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)-\frac{\pi}{2}\right] \qquad [5.17]$$

$$\Psi = A\cos\left(\omega t + k\,x - \frac{\pi}{2}\right) \qquad [5.18]$$

Ejemplo

La expresión matemática de una onda armónica transversal que se propaga por el eje X, es: $\Psi = 0{,}2\,sen\left(100\,\pi\,t - 200\,\pi\,x\right)$, en unidades SI. Determina:

a) Los valores del periodo, la amplitud, la longitud de onda y la velocidad de propagación de la onda.
b) La expresión matemática de la onda en términos de la función coseno.

a) Se trata de una onda que viaja hacia la derecha del eje X. Comparando con la ecuación de la onda [5.11].

$$\Psi = A\,sen\,2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right); \qquad \Psi = 0{,}2\,sen\left(100\,\pi\,t - 200\,\pi\,x\right)$$

Resulta: $A = 0{,}2\ m$; $\frac{2\pi}{T} = 100\,\pi$; $\frac{2\pi}{\lambda} = 200\,\pi$

Despejando: $T = \frac{2}{100} = 0{,}02\,s$; $\lambda = \frac{2}{200} = 0{,}01\,m$

La velocidad de propagación de la onda es: $v = \frac{\lambda}{T} = \frac{0{,}01\,m}{0{,}02\,s} = 0{,}5\,\frac{m}{s}$

b) Expresión de la onda en función del coseno. Empleando la ec.[5.15] resulta:

$$\Psi = A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)-\frac{\pi}{2}\right] = 0{,}2\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{0{,}02}-\frac{x}{0{,}01}\right)-\frac{\pi}{2}\right] = 0{,}2\cos\left[\left(100\,\pi\,t - 200\,\pi\,x\right)-\frac{\pi}{2}\right]$$

b) Cuando el foco se sitúa en el origen $x_F = 0$ y las vibraciones comienzan desde la posición más alejada del equilibrio, es decir, desde la amplitud A Entonces la fase inicial debe valer, $\theta_o = 90^o = \pi/2$ *(rad)* y sustituyendo en las ecuaciones [5.7], [5.8], [5.9] y [5.10] se simplifican:

- Onda, cuyo sentido de propagación es hacia la derecha del eje X:

$$\Psi = A\ sen\left[\ 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\frac{\pi}{2}\right] = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right) \qquad [5.19]$$

$$\Psi = A\,sen\left[\left(\omega t - k\,x\right)+\frac{\pi}{2}\right] = A\cos\left(\omega t - k\,x\right) \qquad [5.20]$$

- Onda cuyo sentido de propagación es hacia la izquierda del eje X:

$$\Psi = A sen\left[2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)+\frac{\pi}{2}\right] = A cos\, 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right) \qquad [5.21]$$

$$\Psi = A\ sen\left[(\omega t + k\,x)+\frac{\pi}{2}\right] = A cos(\omega t + k\,x) \qquad [5.22]$$

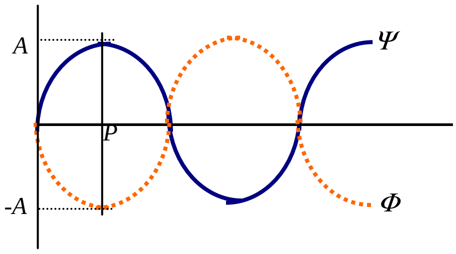


Fig.5.9. Dos funciones sinusoidales que están desfasadas π radianes, son opuestas, de modo que en cada punto toman valores iguales pero de signo contrario. En un punto P, una toma el valor A, y la otra toma $-A$, etc.

Otras ecuaciones de las ondas armónicas

Un modo también habitual de expresar la ecuación de una onda armónica se fundamenta en considerar que el estado vibratorio de un punto x, lo tuvo antes otro punto del medio, situado más próximo al foco. Se demuestra que las ecuaciones de las ondas cuyo foco está en $x_F = 0$ y con $\theta_o = 0$, son:

Onda hacia la derecha

$$\Phi = A sen\, 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{T}\right) \qquad [5.23]$$

$$\Phi = A sen(k\,x - \omega t) \qquad [5.24]$$

Onda hacia la izquierda

$$\Phi = A sen\, 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}+\frac{t}{T}\right) \qquad [5.25]$$

$$\Phi = A sen(k\,x + \omega t) \qquad [5.26]$$

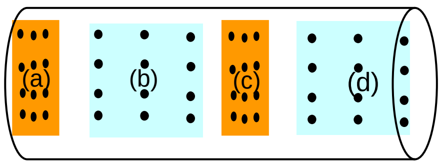


Fig.5.10. Al propagarse un sonido por un tubo, a medida que va avanzando las partículas del aire se comprimen, zonas (a) y (c); y se expansionan, zonas (b) y (d). Por el medio se propaga una onda de presión. Es este caso Ψ representa una presión.

La elongación Φ, es distinta a la Ψ de las ecuaciones: [5.11]; [5.12]; [5.13]; [5.14], pues los senos están aplicados a fases de signos opuestos.

$$2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{T}\right) = -2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$$

Sustituyendo en la ec. [5.23] se relacionan las funciones Φ y Ψ:

$$\Phi = A sen\, 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{T}\right) = A sen\left[-2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\right] = -A sen\, 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right) = -\Psi$$

En consecuencia $\Phi = -\Psi$. Estas dos funciones sinusoidales (senos), están en oposición de fase, fig.5.9 y desfasadas en π radianes.

RESUMIENDO: Todas las ecuaciones obtenidas son igualmente válidas para el movimiento ondulatorio longitudinal o transversal. Sin embargo la propiedad que transmite la onda por el medio, puede ser muy distinta.

Por ejemplo, al propagarse un sonido por el aire que es una onda longitudinal, las ecuaciones [5.11] y [5.12] dan las variaciones de presión que experimentan las moléculas del aire, fig.5.10, mientras que si se trata de una onda transversal que se desplaza por una cuerda tensa, situada horizontalmente, las mismas ecuaciones dan los desplazamientos verticales que sufren los puntos de la cuerda, fig.5.11.

Fotografía Autores

Fig.5.11. Propagación de una onda transversal en una cuerda tensa. En esta situación la función Ψ determina los desplazamientos verticales de las partículas de la cuerda.

En las ondas luminosas, la función Ψ representa al campo eléctrico variable E, que se va propagando con la luz, o el campo magnético B. Estas ondas a diferencia de las ondas mecánicas que estamos tratando, se propagan por el vacío sin necesidad de un medio material que sirva de soporte.

Ejemplo

Si la amplitud de vibración de las partículas de la cuerda del ejemplo 1, es de 5 cm, escribe la ecuación del movimiento ondulatorio que se propaga por la cuerda en el sentido negativo del eje x, en función de Ψ y de Φ.

Las magnitudes valen: $T=\frac{1}{f}=\frac{1}{10\,Hz}=0{,}1\,s$; $\omega=\frac{2\pi}{T}=20\pi\frac{rad}{s}$ $\lambda = 0{,}93\ m;$ $k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi}{0{,}93}=7{,}76\,m^{-1}$

Empleando las ecuaciones: [5.13] y [5.14] : $\Psi=5.10^{-2}\,sen\,2\pi\left(\frac{t}{0{,}1}+\frac{x}{0{,}93}\right);$ $\Psi=5.10^{-2}\,sen\left(20\pi t+7{,}76\,x\right)$

Empleando las ecuaciones : [5.21] y [5.22]: $\Phi=5.10^{-2}\,sen\ 2\pi\left(\frac{x}{0{,}93}+\frac{t}{0{,}1}\right)$; $\Phi=5.10^{-2}\,sen\left(7{,}76\,x+20\pi t\right)$

Ejemplo

La ecuación de una onda transversal es: $\Psi(x,t)=40\,sen\,2\pi\left(2t-5x\right)$ *. Calcula:*

a) Velocidad de propagación de la onda.
b) La distancia entre dos puntos cuya diferencia de fase es π radianes.

a) Comparando las ecuaciones [5.11] $\Psi=A sen\,2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right);$ *con* $\Psi=40\,sen\,2\pi\left(2t-5x\right)$ resulta:

$$A = 40\ m\ ; \qquad 2=\frac{1}{T}\ ; \qquad T = 0{,}5\ s; \qquad 5=\frac{1}{\lambda}\ ; \qquad \lambda = 0{,}2\ m$$

La velocidad vale: $v=\frac{\lambda}{T}=\frac{0{,}2\,m}{0{,}5\,s}=0{,}4\frac{m}{s}$

b) Consideremos dos puntos x_1 y x_2 . La diferencia de fase entre los dos punto en un mismo instante de tiempo *t*, se obtiene de restar las fases de las ondas correspondientes a cada punto, siendo la fase todo lo que va delante del seno:

$2\pi\left(2t-5x_1\right)-2\pi\left[2t-5x_2\right]=\pi$; π se toma del enunciado: $4t-10x_1-4t+10x_2=1$; $x_2-x_1=\frac{1}{10}=0{,}1\,m$

Ejemplo

Por una cuerda se propaga una onda cuya ecuación es $\Phi(x,t)=3\,sen\left(x+4t\right)$ *en unidades SI*. Calcula:

a) Velocidad con que se propaga la onda.
b) La velocidad transversal de un punto situado en $x = 2\ m$, en el instante $t = 3\ s$.
c) Distancia mínima entre don puntos del medio que oscilan con una diferencia de fase de 60º.

a) Se trata de una onda que va hacia la izquierda. Comparando: $\Phi\left(x,t\right)=3\,sen(x+4t)$ *con* $\Phi=A\,sen\ 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}+\frac{t}{T}\right)$

Resulta: $A = 3\ m$; $\frac{2\pi}{\lambda}=1$; $\lambda = 2\pi\ m$; $\frac{2\pi}{T}=4$; $T=\frac{\pi}{2}s$. La velocidad de la onda es: $v=\frac{\lambda}{T}=\frac{2\pi}{\pi/2}\frac{m}{s}=4\frac{m}{s}$

b) La velocidad de un punto de la cuerda no se debe confundir con la velocidad de la onda, son magnitudes distintas. Considere un punto situado en una abscisa $x = x_1$; la ecuación del movimiento vibratoria armónico que efectúa, es obtiene fijando el valor de la abscisa en la ecuación de la onda: $\Phi(x_1\ ,t)=3\,sen\left(x_1+4t\right)$

Para saber la velocidad transversal de un punto de la cuerda, derivamos la ecuación de Φ, respecto del tiempo.

$V(x_1\,,t)=\frac{d\,\Phi(x_1\,,t)}{dt}=3\cdot\ 4\ cos\left(x_1+4t\right)=12\,cos\left(x_1+4t\right)$. Sustituyendo: $V\left(2{,}3\right)=12\,cos(2+4\cdot 3)\,rad=1{,}64\frac{m}{s}$

c) La diferencia de fase se expresa en radianes: $60º=\frac{\pi}{3}rad$ y después se escribe para dos puntos x_1 y x_2 en el mismo instante: $\left(x_1+4t\right)-\left(x_2+4t\right)=\frac{\pi}{3}$; resultando la distancia entre los puntos: $x_1-x_2=\frac{\pi}{3}m$

El movimiento ondulatorio es periódico en el espacio y en el tiempo

La ecuación de una onda la estamos expresando mediante funciones, seno y coseno, llamadas funciones armónicas. Estas funciones tienen la propiedad de que al ser incrementadas en una magnitud llamada periodo, vuelven a tomar el mismo valor. Veremos a continuación que la ecuación de una onda es doblemente periódica, en el espacio de periodo igual a la longitud de onda λ, y en el tiempo de periodo T.

Considerando que estamos observando el medio perturbado en un cierto instante, es como si sacáramos una fotografía del mismo, en la que pudiéramos medir los desplazamientos de las partículas en el instante $t = t_1$ Suponiendo que las dos partículas están separadas una longitud de onda, una estará en x_1 y la otra en $x_2 = x_1 + \lambda$.

Las ecuaciones de los estados vibratorios de ambas partículas son:

$$\Psi_1 = A\,sen\,2\pi\left(\frac{x_1}{\lambda}-\frac{t_1}{T}\right)$$

$$\Psi_2 = A\,sen\,2\pi\left(\frac{x_2}{\lambda}-\frac{t_1}{T}\right) = A\,sen\,2\pi\left(\frac{x_1+\lambda}{\lambda}-\frac{t_1}{T}\right) = A\,sen\,2\pi\left(\frac{x_1}{\lambda}-\frac{t_1}{T}+1\right)$$

$$\Psi_2 = A\,sen\left[2\pi\left(\frac{x_1}{\lambda}-\frac{t_1}{T}\right)+2\pi\right] == A\,sen\,2\pi\left(\frac{x_1}{\lambda}-\frac{t_1}{T}\right) = \Psi_1$$

Como las funciones armónicas, seno y coseno, al incrementarse o decrementarse en 2π *radianes,* toman el mismo valor, deducimos que $\Psi_2 = \Psi_1$. Es decir, que dos puntos que en el mismo instante están separados por una longitud de onda λ, vibran en concordancia de fase. Sucede lo mismo si la distancia entre dos puntos es un número entero n, de longitudes de onda, es decir: $x_2 - x_1 = n\,\lambda$. *El movimiento ondulatorio es periódico en el espacio, de periodo λ ó $n\lambda$.*

Situémonos ahora frente a un punto del medio en una posición $x = x_1$ y observemos el estado vibratorio de una partícula, cuando el tiempo se incrementa en un periodo, es decir en los instantes: t_1 y $t_2 = t_1 + T$.

Las elongaciones de la partícula es en los instantes t_1 y t_2 son:

$$\Psi_1 = A\,sen\,2\pi\left(\frac{x_1}{\lambda}-\frac{t_1}{T}\right);$$

$$\Psi_2 = A\,sen\,2\pi\left(\frac{x_1}{\lambda}-\frac{t_1+T}{T}\right) = A\,sen\,2\pi\left(\frac{x_1}{\lambda}-\frac{t_1}{T}-1\right) = A\,sen\,2\pi\left(\frac{x_1}{\lambda}-\frac{t_1}{T}\right) = \Psi_1$$

Observa cono el estado vibratorio de una partícula del medio vuelve a repetirse, cuando el tiempo transcurrido se ha incrementado en un periodo. E*l movimiento ondulatorio es también periódico en el tiempo, de periodo T.*

Conclusión final, el movimiento ondulatorio es doblemente periódico, en el espacio de periodo λ y en el tiempo de periodo T.

Diferencia de fase entre dos puntos del medio alcanzados por una onda.

Cuando una onda se propaga por un medio material, sus partículas entran en vibración en distintos instantes de tiempo y en consecuencia existirá una diferencia de fase entre ellas.

Si después de establecida la onda se quiere saber en un cierto instante t, la diferencia de fase entre dos partículas situadas en x_2 y en x_1 escribiremos la ecuación de la onda particularizándola para cada punto.

$$\Psi(x_1, t) = A\,sen(\omega t - k\,x_1)$$
$$\Psi(x_2, t) = A\,sen(\omega t - k\,x_2)$$

La diferencia de fase es:

$$\Delta\theta = (\omega t - k\,x_1) - (\omega t - k\,x_2)$$

$$\Delta\theta = (x_2 - x_1)\,k = (x_2 - x_1)\frac{2\pi}{\lambda}$$

Propagación de ondas, en dos y tres dimensiones

La superficie tranquila del agua puede considerarse como un medio plano. Si dejamos caer una piedra sobre la superficie del agua, a partir del punto de contacto con ella, punto **F** de la fig.5.12, se propagan unas ondas que a modo de circunferencias de radio creciente, van avanzando por toda la superficie del recinto alejándose del foco. En este medio la propagación se produce mediante ondas que avanzan por una superficie plana.

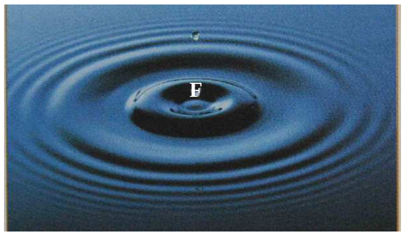


Fig.5.12. Ondas que se propagan por la superficie del agua a partir del punto **F** en el que se inició la perturbación. Los anillos que se pueden observar son los frentes de ondas.

Frente de onda. El lugar geométrico de todos los puntos que siendo alcanzados por la onda a la vez, vibran en concordancia de fase, forman una superficie de onda o frente de ondas. En la fig.5.12, se pueden observar varios frentes de ondas.

Si encendemos una bombilla o escuchamos un altavoz situado en un recinto libre, ahora las ondas se propagan en todas direcciones, es decir en el espacio de tres dimensiones. Si el medio es homogéneo y tiene las mismas propiedades en todas direcciones (isótropo), entonces, a partir del foco las ondas se transmiten mediante esferas de radio creciente y se dice que se propagan ondas esféricas, fig.5.13. Obsérvense los frentes de onda esféricos.

Cuando la propagación se efectúa a distancias muy alejadas del foco de la perturbación (para distancias muy grandes con relación al valor de la longitud de onda), entonces, si se limita una parte del frente de ondas, se puede considerar la propagación por ondas planas, como las de la fig.5.14.

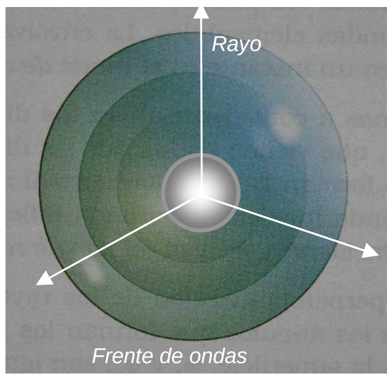


Fig.5.13. Propagación de un movimiento ondulatorio por ondas esféricas. Se representan además los frentes de ondas esféricos y los rayos.

Para facilitar la explicación de la propagación de las ondas planas o esféricas, se define el *rayo,* como una recta trazada en la dirección perpendicular a los frentes de ondas, fig.5.13 y fig.5.14. Sirve para indicar la dirección y el sentido de propagación del movimiento ondulatorio.

PRINCIPIO DE HUYGENS

Este principio representó una anticipación de las leyes que rigen la propagación de las ondas. Para explicar la forma de propagación de las ondas por un medio, Huygens en 1690, trazó en cada punto de un frente de ondas, ***PQ,*** fig.5.15, pequeñas superficies esféricas, conocidas como ondas elementales, con las que enunció el siguiente principio:

L*os puntos de un frente de ondas, se convierten en centros emisores de ondas elementales, de modo que el nuevo frente de ondas* ***ABC****, es la superficie tangente (envolvente) a todas las ondas elementales emitidas en la superficie anterior.* De este modo se pueden in construyendo un nuevo frente de ondas a partir del anterior y justificar su avance por el medio.

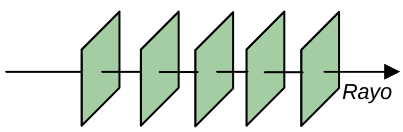


Fig.5.14. El rayo es perpendicular a los frentes de ondas.

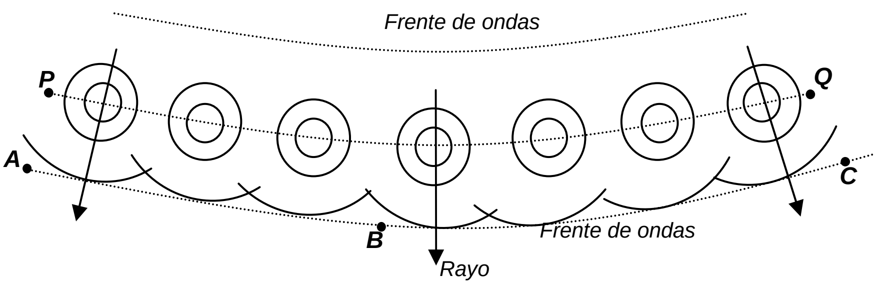


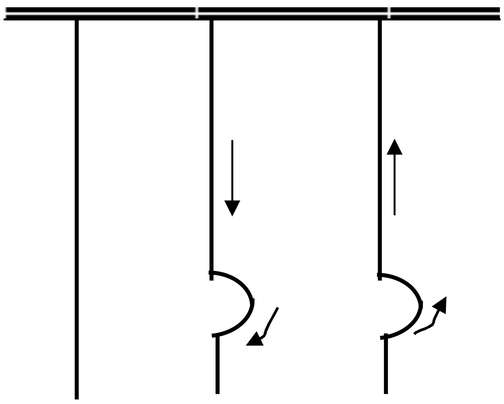
Fig.5.15. Construcción del principio de Huygens

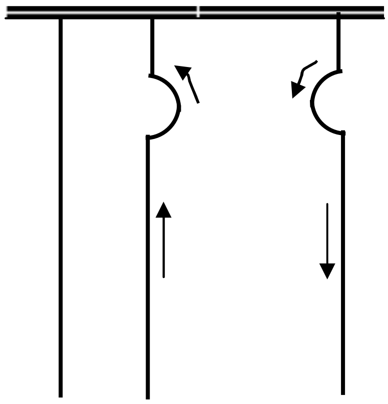
Fenómenos producidos al propagarse las ondas

Cuando las ondas se propagan por un medio y llegan a otro distinto, en general, una parte de la energía es reflejada y la onda continua su propagación por el mismo medio, mientras que otra parte de la energía es transmitida y la onda se propaga por el medio de propiedades físicas distintas.

- Cuando las ondas en su propagación tropiezan con un obstáculo, dependiendo de la relación entre el tamaño del mismo y la longitud de onda del movimiento ondulatorio, se puede producir un fenómeno conocido como difracción. Se Manifiesta cuando las ondas deben atravesar obstáculos (orificio, rendija o ventana), de un tamaño apropiado en relación con la longitud de onda del movimiento ondulatorio.

- Ondas procedentes de focos distintos pueden superponerse en los puntos del espacio, y si reúnen unas condiciones determinadas se produce el fenómeno de las interferencias.
- Las ondas transversales pueden experimentar el fenómeno designado como polarización, que no verifican las ondas longitudinales.
- Una explicación cualitativa de algunos de estos fenómenos, la proporciona la aplicación del principio de Huygens.





Cuando una onda que se propaga por una cuerda llega a un extremo libre, como el (b1), vibra con toda su amplitud y se refleja volviendo es sentido contrario sin modificar su fase (b2).

Cuando una onda llega a un extremo fijo como (a1), en el que no puede vibrar, entonces la onda se refleja y vuelve en sentido contrario en oposición de fase, con relación a la onda incidente (a2), es decir, sufriendo un cambio de fase de π radianes.

Reflexión

Al sufrir una onda una reflexión en la superficie de separación de dos medios distintos, se modifican los frentes de ondas y la dirección de propagación, sin embargo la onda sigue su marcha por el mismo medio del que procedía.

Para el análisis de la reflexión vamos a considerar una onda plana que llega a la superficie reflectora S, que separa dos medios distintos. Al frente de ondas plano incidente, lo representamos por el plano (A_1B_1) cuando alcanza a la superficie reflectora, fig.5.16. Al tocar en A_1 este punto se convierte en centro emisor de ondas elementales que se propagarán por el primer medio a la misma velocidad v_1 con que habían incidido.

El otro extremo, punto B_1 del frente de ondas incidente, (A_1B_1) , tarda un cierto tiempo t, en llegar al punto B_2 de la superficie reflectante, de modo que $B_1B_2 = v_1\, t$. Durante este tiempo la onda emitida inicialmente por A_1 se ha convertido en una superficie semiesférica de radio $R = v_1\, t$ propagándose por el primer medio. Todos los puntos de la superficie S, situados entre A_1 y B_2 , tal como el A son emisores de ondas elementales y la superficie envolvente de todas estas ondas en el instante t, es el nuevo frente de ondas plano (B_2A_2)

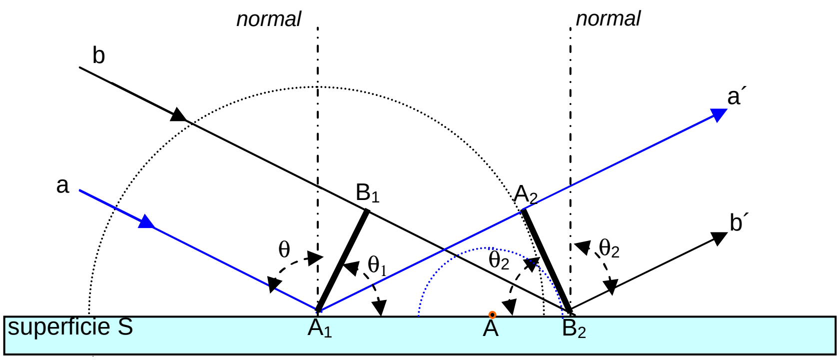


Fig.5.16. Reflexión de una onda plana en una superficie.

Sea θ el ángulo que forma con la normal a la superficie en A_1 , la dirección de la onda incidente (rayo a). El ángulo θ_1 que forma el frente de ondas (A_1B_1) con la superficie S, es por lados perpendiculares, $\theta_1 = \theta$.

Por otr S, un ángulo θ_2 . De la fig.5.16, deducimos que los triángulos rectángulos: $A_1B_1B_2$ y $A_1A_2B_2$ son iguales, por tener la hipotenusa A_1B_2 común y los catetos $B_1B_2 = A_2A_1$. En conclusión, los ángulos θ_2 y θ_1 son iguales entre sí y además iguales al ángulo θ.

$$\theta = \theta_1 = \theta_2$$

Trazando la normal a la superficie S en B_2 ; el ángulo que forma el rayo reflejado b´ ; con la normal también es θ_2 por lados perpendiculares. Si llamamos *ángulo de incidencia*, al ángulo θ que forma el rayo incidente con la normal a la superficie y *ángulo de reflexión* θ_2 al que forma el rayo reflejado con la normal a la superficie. Podemos afirmar *que el ángulo de incidencia y el de reflexión son iguales.*

Por otra parte, las direcciones de la onda incidente (rayo incidente), de la onda reflejada (rayo reflejado) y la de la normal a la superficie reflectante S, están en el mismo plano. Estos dos enunciados constituyen las leyes de la reflexión de las ondas y las cumplen tanto las ondas mecánicas como por ejemplo el sonido, o las ondas electromagnéticas como por ejemplo la luz.

Refracción

Si al llegar la onda incidente a la superficie de separación de dos medios distintos, (medio 1 donde la velocidad de la onda es v_1 y medio 2 donde la velocidad de la onda es distinta v_2), el frente de ondas sufre un cambio de dirección y después continua su propagación por el otro medio, el fenómeno se conoce como refracción.

Consideremos una onda incidente fig.5.17, que llega a la superficie S (que ahora no es reflectante), formando el rayo, un ángulo de incidencia θ_1 con la normal en el punto A_1. De acuerdo con el principio de Huygens este punto se convierte en centro emisor de ondas elementales que se propagan por el segundo medio a una velocidad distinta v_2 . Suponiendo que la velocidad de la onda en el segundo medio es menor que en el primero, $v_2 < v_1$, en el mismo tiempo, la onda recorre en el segundo medio, una distancia menor que en el primero: $A_1A_2 < B_1B_2$.

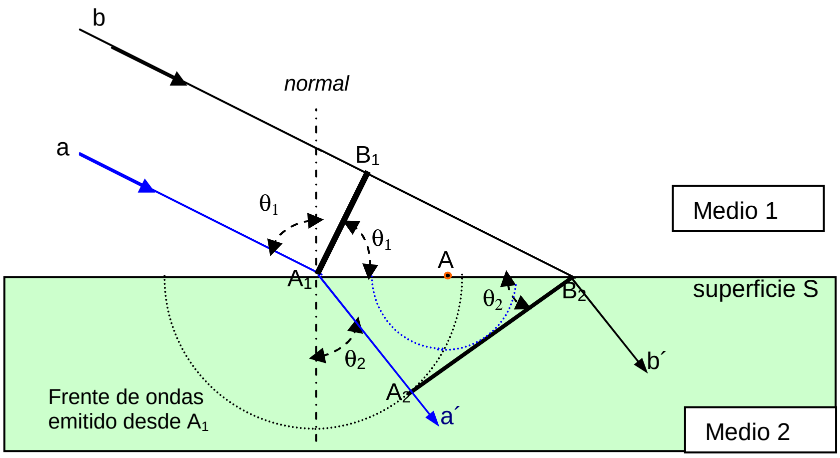


Fig.5.17. Refracción de ondas planas.

El otro extremo de la onda, punto B_1 tarda en llegar hasta B_2 un tiempo *t.* Durante este tiempo cada punto de la superficie S, comprendido entre A_1 y B_2 tal como el A, es alcanzado por la onda incidente y se convierte en centro emisor de ondas elementales de acuerdo con el principio de Huygens, y la envolvente (B_2A_2) de todas estas ondas en el instante *t,* se obtiene trazando desde B_2 la tangente al frente de ondas emitido desde A_1 . El rayo refractado se traza en la dirección que va de A_1 hasta A_2 y el ángulo θ_2 que forma con la normal, se llama ángulo refractado. En la fig.5.17, el ángulo que forma el segmento A_1B_2 con el frente de ondas (B_2A_2) que se propaga por el segundo medio, también es θ_2 por lados perpendiculares.

En el triángulo $A_2A_1B_2$ deducimos: $A_1A_2 = A_1B_2 \text{ sen } \theta_2$

En el triángulo $A_1B_1B_2$ deducimos: $B_1B_2 = A_1B_2 \text{ sen } \theta_1$

Ahora bien, A_1A_2 es la distancia recorrida por la onda en el tiempo *t,* por el segundo medio con velocidad v_2 . Resulta: $A_1A_2 = v_2 \cdot t$. Análogamente, B_1B_2 es la distancia recorrida por la onda en el tiempo *t,* en el primer medio con velocidad v_1 . Resulta : $B_1B_2 = v_1 \cdot t$

Sustituyéndolas resulta: $v_2 \cdot t = A_1B_2 \text{ sen } \theta_2$ $\qquad v_1 \cdot t = A_1B_2 \text{ sen } \theta_1$

Eliminando A_1B_2 dividiendo miembro a miembro las dos ecuaciones::

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\text{sen } \theta_2}{\text{sen } \theta_1} \qquad [5.27]$$

La ecuación [5.27] constituye una de las leyes de la refracción. Se pueden presentar dos casos:

a) Cuando sea $v_2 < v_1$ entonces es $\text{sen } \theta_2 < \text{sen } \theta_1$ y en consecuencia el ángulo refractado θ_2 es menor que el de incidencia θ_1 . El rayo refractado a´ se acerca más a la normal que el rayo incidente a.

b) Cuando sea $v_2 > v_1$ entonces es sen θ_2 > sen θ_1 y en consecuencia el ángulo refractado θ_2 es mayor que el de incidencia θ_1. Entonces el rayo refractado a´ se aleja más de la normal que el rayo incidente a.

En el caso de que: $\frac{v_2}{v_1}\ sen\ \theta_1 = sen\ \theta_2 = 1$; es entonces θ_2 = 90º y al ángulo θ_1 que forma el rayo incidente con la normal, se llama *ángulo límite,* θ_L, fig.5.18. Su valor se calcula de la anterior ecuación.

$$sen\ \theta_L = \frac{v_1}{v_2} \qquad [5.28]$$

Los rayos que incidan formando con la normal ángulos θ_1 mayores que el ángulo límite θ_L; no pasarán al segundo medio, experimentando la reflexión total, fig.5.19. Este suceso solo es posible cuando $v_2 > v_1$.

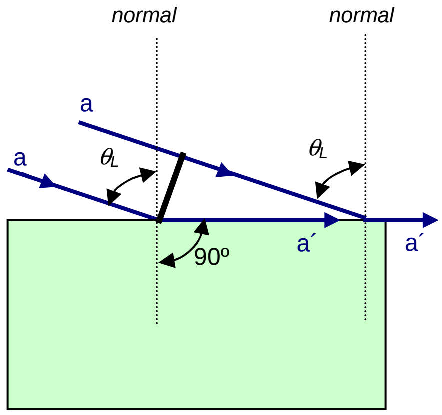


Fig.5.18. Cuando la dirección de la onda, dada por el rayo incidente a, forma con la normal el ángulo límite θ_L entonces el rayo refractado a´ sale formando con la normal a la superficie un ángulo de 90º.

Ejemplo

Una onda sonora que se propaga por el aire con una velocidad v_1 pasa a otro medio gaseoso donde su velocidad v_2 es doble que en el aire. Determina:
a) El ángulo de refracción cuando incide formando 15º con la normal.
b) Valor del ángulo límite del primer medio.
c) Si incide con un ángulo de 40º, ¿cuánto vale el ángulo refractado?.

a) Aplicando [5.27] resulta: $sen\,\theta_2 = \frac{v_2}{v_1} sen\,\theta_1 = \frac{2v_1}{v_1} sen15º = 0{,}5176$

$\theta_2 = arcsen\ 0{,}1576 = 31{,}2º$

b) Aplicando [5.28] obtenemos: $sen\,\theta_L = \frac{v_1}{v_2} = \frac{v}{2v_1} = \frac{1}{2}$; $\theta_L = arc\,sen\,0{,}5 = 30º$

d) Si el rayo incidente forma un ángulo con la normal $\theta_1 = 40º$ que es mayor que el ángulo límite $\theta_L = 30º$, entonces no hay refracción y la ecuación [5.27] no debe aplicarse. Se produce entonces la reflexión total y el rayo reflejado sale formando un ángulo de 40º con la normal, igual que el rayo incidente.

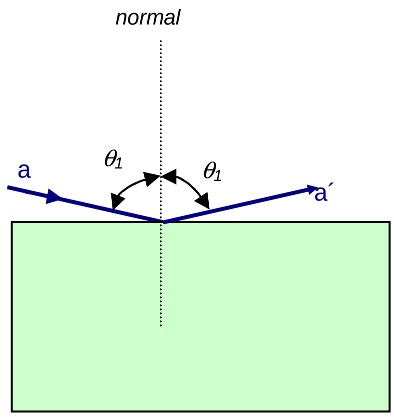


Fig.5.19. Cuando el rayo incide formando con la normal un ángulo superior al límite, entonces se produce la reflexión total, y toda la energía de la onda es devuelta al primer medio de propagación.

Difracción de ondas

Una demostración experimental del principio de Huygens se puede realizar haciendo incidir ondas planas sobre una pared, fig.5.20, en la que se ha practicado un pequeño agujero cuya anchura sea del mismo orden de magnitud, que la longitud de onda. Las ondas planas que se aproximan a la pared desde la izquierda, son en parte reflejadas hacia atrás y en parte absorbidas por la pared, excepto en el agujero. Si el experimento se hace en una vasija con agua, se observa que a partir del orificio salen ondas en todas direcciones, como si el foco fuese un emisor puntual. En la fig.5.20, se dibujan las envolventes de todas las ondas elementales (no representadas) de acuerdo con la aplicación del principio de Huygens.

Si repetimos el experimento pero ahora en lugar de una rendija estrecha se sitúa una ventana ancha, cuya amplitud es mucho mayor que la longitud de onda, fig.5.21, se observa que el frente de ondas plano, atraviesa al otro lado sin haber sufrido ninguna modificación.

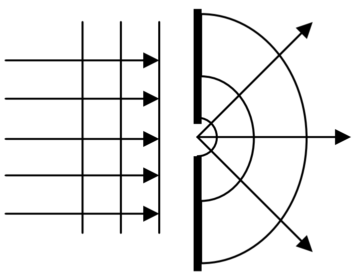


Fig.5.20. Difracción por una rendija

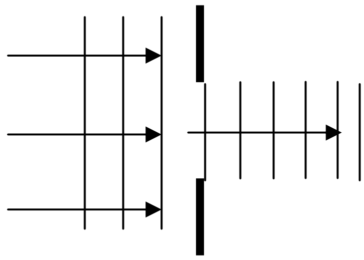


Fig.5.21. Frente de onda a su paso por una ventana ancha.

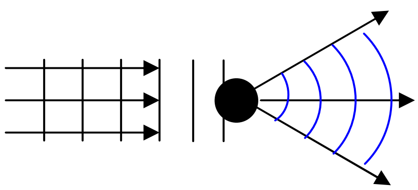


Fig.5.22. El pequeño obstáculo situado en el centro de la figura, al interaccionar con el frente de ondas plano, provoca en el frente, la emisión de ondas elementales en distintas direcciones y de acuerdo con el principio de Huygens, se modifica la forma del frente de ondas, curvándose.

Si se sitúa un objeto pequeño en el trayecto de las ondas planas, fig.5.22, al llegar al obstáculo, se puede observar que de nuevo se emiten ondas en todas direcciones como si se tratara de una fuente puntual.
Aquellos fenómenos en los que al incidir las ondas sobre objetos comparables en tamaño a su longitud de onda, modifican la dirección de propagación del frente de onda como sucede en las figuras, 5.20 y 5.22, se conocen como *difracción* y son muy espectaculares cuando los producen las ondas luminosas. En las figuras 5.23 y 5.24, se muestran las imágenes de difracción producidas por un agujero y una rendija, con la luz de un láser.

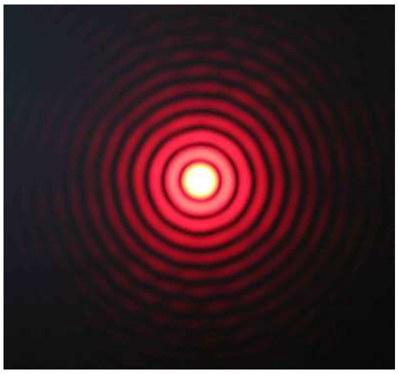


Fig.5.23. Imagen de difracción producida por un agujero de 0,24 mm de diámetro. Se observan anillos luminosos llamados máximos, separados por otros sin luz, los mínimos nulos.

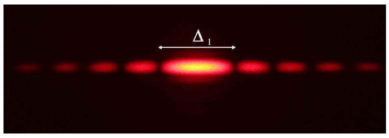


Fig.5.24. Imagen de difracción producida por una rendija de 0,24 mm de anchura. Se ven zonas luminosas separadas por mínimos nulos.

Polarización de ondas transversales

Consideremos una cuerda tensa en la que una partícula situada en el foco F, vibra con un movimiento vibratorio armónico en la dirección del eje Y, fig.5.25. Todas las partículas de la cuerda irán realizando vibraciones con un cierto retraso, estando contenidas en el plano XY. El plano en que tiene lugar la vibración de las partículas, se llama *plano de vibración.*

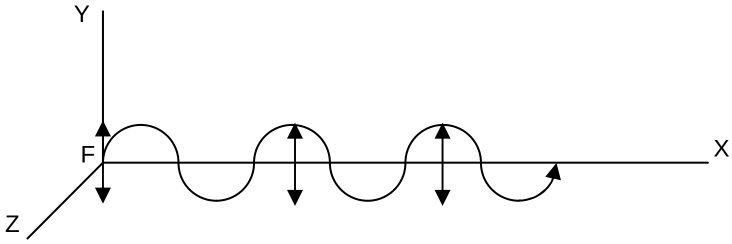


Fig.5.25. Onda propagándose por el eje X

Siempre que las partículas vibren dentro de un mismo plano, en este caso el XY, se dice que la onda está plano-polarizada, aunque algunos autores prefieren decir que la onda está polarizada linealmente. El plano perpendicular al de vibración, se llama plano de polarización, es decir el XZ.

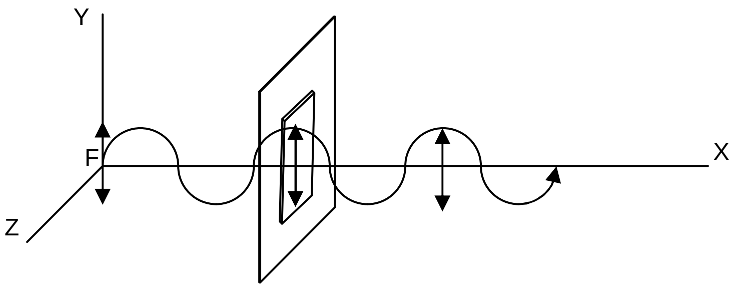


Fig.5.26. Onda plano-polarizada

Supongamos ahora que situamos una estrecha ventana por la que pasa la cuerda vibrando, fig.5.26. Si la ventana está situada paralelamente a la dirección de vibración, no influye para nada en el movimiento ondulatorio, pero si se sitúa formando un cierto ángulo θ, con la dirección de la vibración, (eje Y) entonces si que perturbará a la onda, fig.5.27.
En este caso la amplitud de la vibración A, tomará un nuevo valor A´ que será la proyección de la amplitud en la dirección de la ventana A´ = A cos θ y la onda saldría vibrando en la dirección de la ventana con esta amplitud menor, estaría polarizada linealmente en la dirección de la ventana.
En el caso en el que la ventana estuviera situada perpendicularmente a la dirección de vibración, entonces el ángulo formado por la amplitud con la dirección de la ventana sería de 90º y la amplitud A´ para la onda polarizada sería nula, quedando toda la energía absorbida al pasar por la ventana.
Si una cuerda que está vibrando en cualquier dirección se hace pasar por una ventana lo suficientemente estrecha y larga, entonces solamente las componentes de la amplitud en la dirección de la ventana, transmitirán vibración al otro lado. La onda que avanzaba por la cuerda haciéndola vibrar en cualquier dirección, saldrá ahora plano-polarizada. La polarización es una característica exclusiva de las ondas transversales.

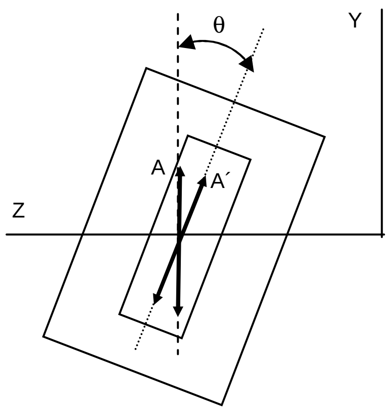


Fig.5.27. La ventana está girada un ángulo θ respecto de la dirección de vibración de la onda, que es paralela al eje Y.
La proyección de la amplitud de la onda A, en la dirección de la ventana vale A´ = A cos θ.

La polarización de las ondas transversales es de gran importancia para las ondas luminosas, por las enormes aplicaciones que tiene la luz polarizada, tanto en la Tecnología como en la Ciencia.

Ondas estacionarias

Muchos instrumentos musicales funcionan mediante ondas que se forman en cuerdas o en tubos, haciendo vibrar a las partículas del aire. Cuando se pueden visualizar en un medio, estas ondas dan la impresión de que no avanzan y por este motivo se designa como onda estacionaria, ver fig.5.28.

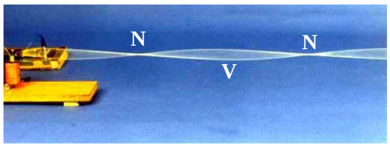


Fig.5.28. En la onda estacionaria pueden distinguirse unos puntos que nunca vibran llamados *nodos* **N** y otros que vibran con la máxima amplitud llamados *vientres* V.

La onda estacionaria se produce por la superposición de una onda progresiva que al llegar al límite de un medio sufre una reflexión y regresa en sentido contrario. Dependiendo de que el límite sea libre o fijo, la onda se refleja en fase o con un cambio de fase de 180º, es decir en oposición.

Para el estudio matemático, vamos a considerar una cuerda con sus dos extremos fijos que entra en vibración, situación que se mantendrá un cierto tiempo. El origen de referencia lo situaremos en el punto fijo de la izquierda, y la onda avanza hacia la derecha hasta llegar al otro extremo fijo, donde se refleja y vuelve en sentido contrario con un cambio de fase, , fig.5.29. La superposición de las dos ondas de sentidos opuestos, produce la onda estacionaria. Las ecuaciones de las ondas serán:

$\Psi_1 = A\ sen(\omega t - k\,x)$; para la onda hacia la derecha

$\Psi_2 = -A sen(\omega t + k\,x)$; Para la onda hacia la izquierda.

El – es debido al cambio de fase en el extremo fijo de la derecha.

El estado vibratorio de un punto x, del medio, se determina mediante el principio de superposición de modo que la ecuación de la onda resultante es: $\Psi_E = \Psi_1 + \Psi_2$. Y tendrá la misma frecuencia ω y una cierta amplitud A que hay que determinar mediante desarrollos trigonométricos.

$$\Psi_E = A sen(\omega t - k\,x) - A sen(\omega t + k\,x)$$

Aplicando las relaciones trigonométricas de los senos de la diferencia y de la suma de dos ángulos, resulta para la ecuación de la onda resultante:

$$\Psi_E = -2A\ \ sen\,k\,x\ \ cos\,\omega t \qquad [5.29]$$

La diferencia entre la ecuación [5.29] de la onda estacionaria y la ecuación de una onda progresiva, ec.[5.11], es que en esta última la amplitud es la misma para todas las partículas del medio, mientras que al establecerse una onda estacionaria la amplitud de las partículas vale.

$$A = |A = -2\,A\,sen\,k\,x| \qquad [5.30]$$

El cual depende de la posición x que ocupa la partícula en el medio. Mientras unas partículas oscilan con la máxima amplitud, $2A$ llamadas vientres V, otras nunca oscilan y se llaman nodos, N, fig.5.29.

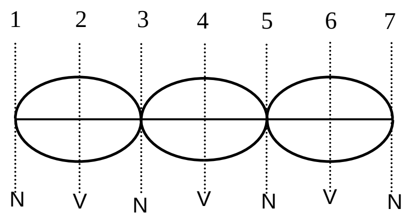


Fig.5.29. Los nodos N, son los puntos del medio que nunca tienen vibración, mientras que los vientres V, son los puntos de vibración máxima.

La distancia entre los nodos 1 y 5 es de una longitud de onda, λ, mientras que entre dos nodos consecutivos como 1 y 3, ó entre dos vientres como 2 y 4, es de media longitud de onda $\lambda/2$. Entre un nodo y un vientre como entre 1 y 2, es $\lambda/4$.

Los nodos están donde $sen\,k\,x = 0$; Por lo tanto en $kx = n\,\pi$; $(n = 0, 1, 2,..)$

Los vientres están donde $sen\,k\,x = \pm 1$; Por lo tanto en $k\,x = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$

Posición Nodos	$x = n\dfrac{\pi}{k}$	$n\dfrac{\lambda}{2}$
Posición Vientres	$x = (2n+1)\dfrac{\pi}{2k}$	$(2n+1)\dfrac{\lambda}{4}$

RECUERDA

sen(a-b)=sen a · cos b - cos a · sen b

sen(a+b)=sen a · cos b + cos a · sen b

k = 2π/λ

Cuando el extremo es libre, la ecuación de la O. Est. es : $\Psi = 2A\cos kx\, sen\,\omega t$

EJEMPLO

La cuerda de una guitarra vibra de acuerdo con la ecuación:

$\Psi(x,t)=0{,}01 sen 10\pi x \cos 200\pi t$ *en unidades SI.*

a) Indica de que onda se trata y calcula la amplitud y la velocidad de propagación de las ondas cuya superposición da lugar a la onda Ψ.

b) Determina la posición de los tres primeros vientres y nodos.

a) Se trata de una estacionaria y comparando con la ec.[5.29], deducimos que:

2A = 0,01 m; A = 5.10^{-3} m; k = 10 π ; ω = 200 π

$$\lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi}{10\pi}=0{,}2\,m\,; \qquad T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{200\pi}=0{,}01\,s\,; \qquad v=\frac{\lambda}{T}=\frac{0{,}2\,m}{0{,}01\,s}=20\frac{m}{s}$$

b) Vientres: $x_V=(2n+1)\frac{\lambda}{4}=(2n+1)\frac{0{,}2}{4}m \begin{cases} n=0\ ; & x=0{,}05\,m \\ n=1; & x=0{,}15\,m \\ n=2; & x=0{,}25\,m \end{cases}$

Nodos: $x_N=n\frac{\lambda}{2}=n\frac{0{,}2}{2}m=\begin{cases} n=0; & x=0 \\ n=1; & x=0{,}1\,m \\ n=2; & x=0{,}2\,m \end{cases}$

Observa que la distancia entre dos nodos o dos vientres consecutivos es la misma y vale 0,1 m, que es la mitad de la longitud de onda.

5.9 Intensidad del movimiento ondulatorio

Consideremos un medio homogéneo e isótropo, que contiene n partículas por unidad de volumen, cada una de masa m. Si en un punto del mismo se encuentra un foco F, que emite vibraciones, estas se propagarán por el espacio a partir del foco mediante ondas esféricas y la energía de la onda se ira transmitiendo por el medio al propagarse los frentes de ondas.

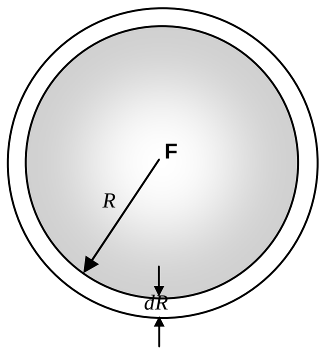


Fig.5.30. La energía se transmite a través de la propagación de los frentes de ondas. En la figura, un frente de ondas tiene de espesor dR y su volumen es igual al área de la superficie esférica de radio R, multiplicado por el espesor dR de la capa, $dV = S \cdot dR$

Supongamos que en un cierto instante el frente de ondas esférico, tiene un radio R . La energía que propaga la onda será la de vibración de las partículas situadas en la superficie de la esfera de radio R, área S y espesor dR., fig.5.30. Hemos estudiado, que la energía total de una partícula que realiza un movimiento vibratorio armónico, ec.[4.14], vale:

$$E_M=\frac{1}{2}m\omega^2A^2$$

El volumen elemental de la cáscara esférica de la fig.5.30, es $dV = S{\cdot}dR$ y la energía que contiene corresponde con la de todas las partículas vibrantes allí situadas, que será el producto del número de partículas que contiene ($n{\cdot}dV$), multiplicado por la energía de vibración de cada una.

$$dW=(n\,dV)\,\frac{1}{2}m\omega^2A^2=\frac{1}{2}n\,m\omega^2A^2\,dV=\frac{1}{2}n\,m\omega^2A^2\,S\,dR$$

La masa de cada partícula m, por el número de partículas que hay en la unidad de volumen n, es la densidad, $\rho=\ {\cdot}m{\cdot}n$. Además, la potencia instantánea es la derivada de la energía respecto del tiempo, de modo que dividiendo ambos miembros entre dt resulta:

$$P=\frac{dW}{dt}=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2S\frac{dR}{dt}=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2S\,v=\frac{1}{2}\rho\omega^2v\,A^2\,S$$

Donde v, es la velocidad de propagación del movimiento ondulatorio por el medio, ρ su densidad y ω la frecuencia angular. Todas son magnitudes constantes que no se modifican en la propagación de la onda. Llamaremos:

$$k = \frac{1}{2}\rho\omega^2 v$$

Resultando para la potencia: $P = k\,A^2\,S$ [5.31]

Definición de intensidad. Una magnitud muy empleada en el movimiento ondulatorio es la intensidad, se define como la energía que atraviesa en la unidad de tiempo, la unidad de superficie situada perpendicularmente a la dirección de propagación del movimiento ondulatorio. Para obtenerla, bastará dividir los dos miembros de ec.[5.31] entre el valor de la superficie S.

$$I = \frac{P}{S} = \frac{k\,A^2\,S}{S} = k\,A^2 \qquad [5.32]$$

La intensidad de una onda es proporcional al cuadrado de la amplitud de las partículas, situadas sobre la superficie unidad considerada.

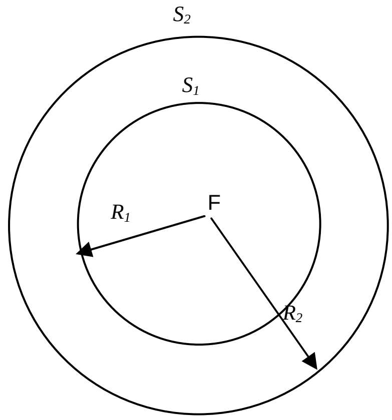


Fig.5.31. Considerando dos superficies S_1 y S_2 de radios R_1 y R_2 situadas a distintas distancias del foco F. La energía que en la unidad de tiempo atraviesa cada superficie es la misma, suponiendo el caso ideal de que no existe absorción por parte del medio material.

Variación de la intensidad de la onda con la distancia al foco.
Al avanzar la onda la energía se reparte por una superficie mayor, en consecuencia la intensidad del movimiento ondulatorio deberá disminuir. Consideremos dos superficies de radios R_1 y R_2 ; fig.5.31. La energía que atraviesa cada superficie en la unidad de tiempo, o potencia, ha de ser la misma pues sino habría acumulación en el medio (estamos considerando un medio ideal). Aplicando ec.[5.32] a cada superficie y considerando que la amplitud de la vibración A debe ser distinta en cada una, resulta:

$$P = k\,A_1^2\,S_1 = k\,A_1^2\,4\pi R_1^2 \;; \qquad P = k\,A_2^2\,S_2 = k\,A_2^2\,4\pi R_2^2$$

Igualando las potencias:

$$k\,A_1^2\,4\pi R_1^2 = k\,A_2^2\,4\pi R_2^2 \;; \qquad A_2^2 = A_1^2\,\frac{R_1^2}{R_2^2} \;; \qquad A_2 = \frac{A_1\,R_1}{R_2}$$

La amplitud de vibración de las partículas decrece con el inverso de la distancia al foco de la perturbación.

Sustituyendo el resultado en la ec.[5.32] se obtiene para la intensidad:

$$I_2 = k\,A_2^2 = k\,\frac{A_1^2\,R_1^2}{R_2^2} = I_1\,\frac{R_1^2}{R_2^2} \;; \qquad \frac{I_2}{I_1} = \frac{R_1^2}{R_2^2} \qquad [5.33]$$

RECUERDA

La superficie de una esfera es:

$S = 4\,\pi R^2$

La intensidad del movimiento ondulatorio decrece con el inverso del cuadrado de la distancia al foco de la perturbación.

La unidad de la intensidad, es la de una energía por unidad de área y tiempo.

$$I = \frac{Energia}{Area \cdot tiempo} = \frac{J}{m^2 \cdot s} = \frac{W}{m^2}$$

Ejemplo

Un foco sonoro emite sonidos con una potencia P = 0,42 W, que se propaga en el aire como ondas esféricas con una velocidad v = 334 m/s. a) Calcula la intensidad a una distancia de 10 m del emisor. b) La magnitud de la intensidad relativa, entre el punto anterior y otro situado a 100 m del foco emisor.

a) Aplicando la ec.]5.32] considerando que la energía se distribuye sobre la superficie de una esfera, resulta:

$$I=\frac{P}{S}=\frac{P}{4\pi R^2}=\frac{0,42W}{4\pi 10^2\,m^2}=3,34.10^{-4}\,\frac{W}{m^2}$$

b) Aplicando la ec.[5.33]

$$\frac{I_2}{I_1}=\frac{R_1^2}{R_2^2}=\frac{10^2\,m^2}{100^2\,m^2}=0,01$$

5.10 Absorción de un movimiento ondulatorio

Cuando una onda mecánica se propaga por un medio material, parte de su energía la va cediendo al medio como consecuencia del rozamiento entre las partículas del mismo, en consecuencia se produce una disminución de intensidad a medida que la onda se va propagando.

Consideremos un frente de ondas plano que se propaga que se propaga en el sentido positivo del eje X, y sea $I(x)$ su intensidad en un punto x del eje, fig.5,32.

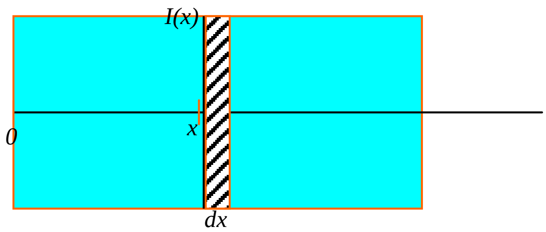


Fig.5.32. Absorción de intensidad de una onda, al atravesar un medio material absorbente.

La disminución de intensidad es proporcional al espesor del medio atravesado dx, al valor de la intensidad en el punto $I(x)$ y a un coeficiente característico del medio, llamado coeficiente de absorción β, llevando la ecuación un signo menos, para caracterizar la disminución de intensidad.

$$dI=-\beta\cdot I\;dx$$

Constituye una ecuación diferencial, que vamos a integrar separando variables.

$$\frac{dI}{I}=-\beta\,dx\,; \qquad\qquad \ln I=-\beta\,x+C$$

Para determinar la constante C, consideramos unas condiciones iniciales en las que en $x=0$ es $I=I_0$; sustituyendo.

$$\ln I_0=C\;; \quad \ln I=-\beta\,x+\ln I_0\;; \quad \ln I-\ln I_0=-\beta\,x\,; \quad \ln\frac{I}{I_0}=-\beta\,x$$

De donde finalmente tomando antilogaritmos resulta:

$$I=I_0\cdot e^{-\beta x} \qquad [5.34]$$

La intensidad de un movimiento ondulatorio decrece exponencialmente con la distancia atravesada x, a medida que la onda se va propagando por el medio material absorbente, ver figura 5.33.

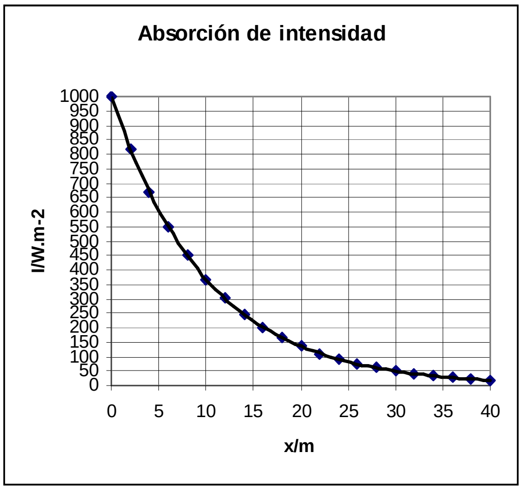


Fig.5.33. Absorción de intensidad de una onda.

Ejemplo

Determinar el coeficiente de absorción de una pared de 30 cm de espesor, para que la disminución de intensidad de un sonido, se reduzca a la cuarta parte.

Si designamos con I_0 al valor inicial de la intensidad, el valor de ésta después de atravesar la pared será $I_0/4$. Sustituyendo en la ec.[5.34].

$$\frac{I_0}{4}=I_0\,e^{-\beta\cdot 0{,}3\,m}\quad;\quad ln\frac{1}{4}=-0{,}3\,m\cdot\beta\cdot ln\,e\quad;\quad \beta=\frac{ln1-ln4}{-0{,}3\,m}=4{,}6\,m^{-1}$$

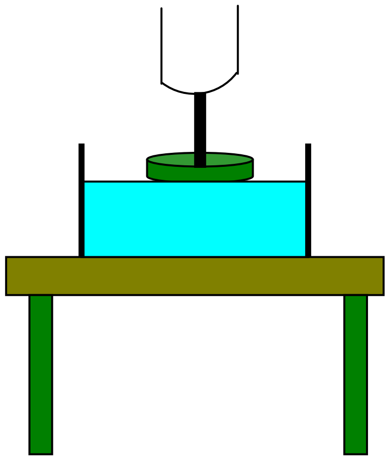


Fig.5.34. El líquido sobre el que toca el soporte del diapasón, transmite sus vibraciones hasta la mesa.

5.11 Ondas sonoras

El sonido es una onda longitudinal, que se puede propagar en sólidos, líquidos y gases pero no en el vacío. Por tratarse de una onda de naturaleza mecánica necesita un medio material para su propagación.

Las partículas del medio al ser alcanzadas por la onda sonora se convierten en osciladores, recibiendo energía del frente de ondas que transmiten a las partículas inmediatas y así progresivamente se produce su transmisión a través del medio material, mediante compresiones y expansiones de las partículas del medio, debido a su carácter longitudinal.

La propagación del sonido a través de los gases se puede observar encerrando un despertador de macillo, dentro de una campana de vidrio con aire, en la que puede hacerse el vacío. Al ver vibrar el macillo observamos a la vez el sonido del despertador, porque las moléculas del aire interior, transportan el sonido hasta la pared de vidrio que entra en vibración y éstas lo transmiten por el aire de la habitación a nuestros oídos. Basta extraer el aire de la campana con una bomba de vacío, para que veamos vibrar el macillo sin escuchar el sonido. La conclusión es que los gases propagan el sonido y éste no puede transmitirse por el vacío.

La transmisión del sonido por un medio líquido se puede verificar con el experimento de la fig.5.34. Basta golpear el diapasón con un macillo para que entre en vibración y después mediante un disco tocar en la superficie del agua, el tablero de la mesa actúa como una caja sonora que hace el sonido más intenso, evidentemente, el sonido se habrá propagado hasta la mesa a través del líquido.

La transmisión por los cuerpos sólidos se puede comprobar con un diapasón provisto de caja de resonancia, cuando entra el diapasón en vibración a través de su soporte que es un sólido se transmite el sonido a la caja donde resuena y se hace más intenso, fig.5.34.

Fig.5.34. El sonido se transmite por el pie del diapasón que es un material sólido, hasta la caja de resonancia.

El sonido se refracta, se refleja y puede sufrir difracción e interferencias como cualquier onda, sin embargo no admite polarización por tratarse de una onda longitudinal. Todas las leyes estudiadas son de aplicación para las ondas sonoras.

El estudio del sonido supone la consideración de un agente físico que produce la emisión de la energía, de un medio material que permite su propagación y de un receptor. Este último puede ser un micrófono que trasforma la onda sonora en una señal eléctrica que podría ser analizada o nuestro oído dotado de una membrana extraordinariamente sensible a muy pequeñas variaciones de presión, el tímpano, que entra en vibración por acción de la onda sonara. La señal se transmite por el oído medio y el interno, produciendo unos impulsos en el nervio auditivo que los envía al cerebro. En consecuencia, en la percepción de un sonido intervienen aspectos físicos y psicológicos.

A partir de experiencias realizadas con muchos individuos se ha llegado a inferir que si la frecuencia de la onda es inferior a 16 Hz no produce sensación audible y el movimiento ondulatorio se designa como un *infrasonido.* Por otro lado si la frecuencia supera los 20 000 Hz, tampoco puede ser percibida y el movimiento ondulatorio se llama *ultrasonido*.

Características del sonido

Tres son las características fundamentales de las ondas sonoras. Sin embargo, en cada una hemos de considerar un aspecto físico y otro subjetivo, a la persona que lo percibe.

Características físicas	Características subjetivas
Intensidad	Sonoridad
Frecuencia	Tono
Forma de la onda	Timbre

La intensidad de un sonido se define igual que la de cualquier onda, como la energía que en la unidad de tiempo, atraviesa la unidad de superficie situada en la dirección perpendicular al sonido. El flujo de energía de un sonido en las condiciones habituales es normalmente pequeño, los valores normales están comprendidos entre $10^{-12}\ W/m^2$ y $10^{-1}\ W/m^2$.

Para una frecuencia audible, la audición sonora no se produce hasta que la intensidad no supera un valor, llamado *valor umbral,* I_0 que depende de la frecuencia. El valor que se corresonde es:

$$I_0 = 1^{-12}\ W / m^2$$

Para una frecuencia de $1000\ Hz$.

La sonoridad o sensación sonora, es una medida subjetiva de la intensidad del sonido y por tanto es una magnitud sensorial, a diferencia de la intensidad física que es magnitud objetiva.

Un método para especificar la sensación sonora, es comparar la intensidad de un sonido con la de otro que tomamos como umbral. Cuando la intensidad es 10 veces mayor que la del umbral, se dice que la relación entre las intensidades es de 1 bel. De acuerdo con esta definición la escala es logarítmica, sin embargo, como el bel resulta una unidad muy grande se emplea el decibel o décima parte del bel (dB), como unidad práctica y en este caso la sonoridad se puede expresar mediante el logaritmo de la intensidad relativa.

$$S = 10\ \log \frac{I}{I_0} \qquad [5.35]$$

Así para un sonido cuya intensidad sea 10 veces la umbral, $I = 10 I_0$; la sonoridad es $S = 10\ lg\ 10 = 10\ dB$.

Mientras que si es $I = 100\ I_0$; la sonoridad es $S = 10\ log\ 100 = 10 \cdot 2 = 20\ dB$.
La capacidad del oído para percibir un sonido, depende también de la frecuencia, en la fig.5.35 se muestra un audiograma para el oído humano.

Niveles de sonido

	Intensidad W/m^2	Sonoridad dB
Umbral audible	10^{-12}	0
Murmullo de hojas	10^{-10}	20
Interior reactor en vuelo	10^{-7}	50
Interior de un gran almacen	10^{-6}	60
Camión gran tonelaje	10^{-3}	90
Conjunto de rock	10^{-3} – 1	90 – 120
Umbral doloroso	1	120

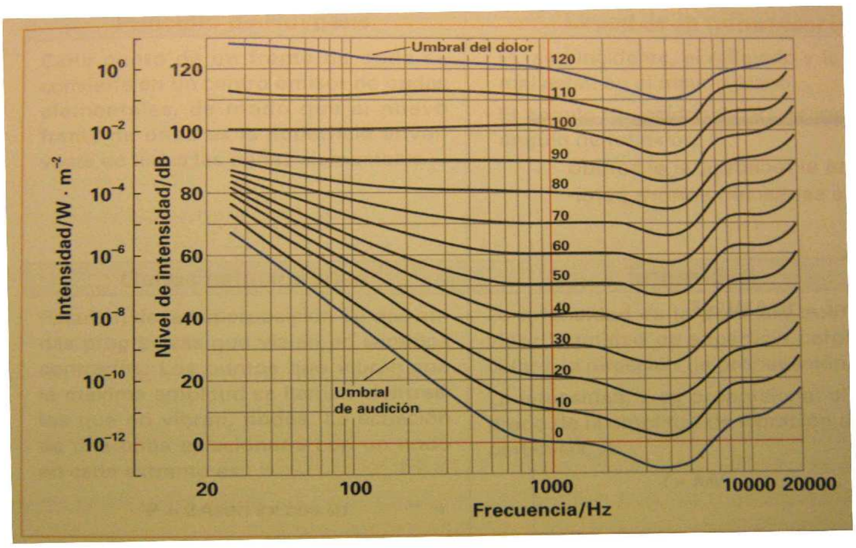


Fig.5.35. Audiograma para el oído humano.

La curva inferior muestra los sonidos más débiles que se pueden escuchar y la superior los más fuertes que son audibles sin sensación dolorosa. La parte inferior de la curva denota la zona en la que el oído es más sensible, entre 1000 y 4000 Hz. Para frecuencias mayores y menores, la sensibilidad disminuye rápidamente. Además, frecuencias inferiores a 20 Hz y superiores a 20.000 Hz es imposible oírlas. La audibilidad disminuye con la edad y el nivel de ruido al que la persona haya estado sometida, a partir de 50 años es difícil percibir frecuencias superiores a los 12.000 Hz.

Para las ondas sonoras en el límite de la audibilidad a 1000 Hz, la amplitud de vibración es de 10^{-10} m, valor aproximado al tamaño del átomo de hidrógeno, lo que da una idea de la sensibilidad del oído. Cuando el sonido percibido es de tal intensidad que produce una sensación dolorosa, entonces la vibración puede llegar a tener una amplitud del mm.

Tono, es la respuesta del oído, al estimulo físico que produce la frecuencia de un sonido, por lo tanto es una magnitud subjetiva, la sensación de tonalidad es también logarítmica con respecto a la frecuencia. En cambio la frecuencia es una magnitud física.

Para sonidos de frecuencias bajas, por ejemplo 250 Hz, un aumento de la intensidad, produce un cambio de calidad acompañado de una disminución del tono. Sin embargo, a frecuencias elevadas 8.000 Hz, un aumento de la intensidad parece elevar el tono. La frecuencia media de un hombre al hablar es de 150 Hz y la de una mujer es de 230 Hz.

Timbre, está relacionado con la forma de la onda y es lo que determina lo que designamos como calidad musical. Esta habilidad del oído es la que nos permite distinguir una voz de otra o a dos instrumentos musicales distintos. Incluso, entre dos instrumentos iguales emitiendo la misma nota, es capaz de apreciar la mayor calidad sonora de cada uno. El oído, tiene la cualidad de descomponer una onda sonora en la suma de otras más sencillas, valorando el espectro (conjunto) de todas.

Ejemplo

Un altavoz emite con una potencia de $100\ W$. Determinar la sonoridad a una distancia del mismo de $30\ m$. Se supone que la propagación del sonido es mediante ondas esféricas en cuyo centro se encuentra situado el altavoz.

La intensidad a esa distancia será: $I = \dfrac{P}{S} = \dfrac{100W}{4\pi\cdot(30\,m)^2} = 884.10^{-5}\,\dfrac{W}{m^2}$

La sonoridad: $$S = 10\log\frac{884.10^{-5}\,W/m^2}{10^{-12}\,W/m^2} = 99{,}5\,dB$$

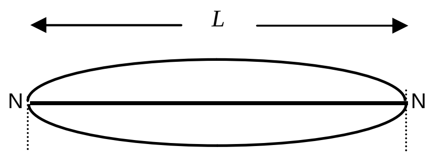


Fig.5.36. Frecuencia fundamental o primer armónico en una cuerda.

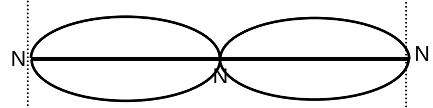


Fig.5.37. Segundo armónico en una cuerda.

Fuentes de sonidos musicales

Los sonidos musicales se producen por vibraciones de cuerdas, membranas, varillas, columnas de aire en tubos sonoros, etc. Los instrumentos que llevan cuerdas, al ser tan delgadas, transmiten mal la energía al aire y necesitan de una caja de buen tamaño que al entrar en vibración, transmita mejor las vibraciones al aire (caja de resonancia).

Cuerda vibrante. Consideremos una cuerda tensada por sus dos extremos que están fijos, al producirse una vibración, está se propaga por la cuerda y se refleja en los extremos, produciéndose una onda estacionaria que tiene nodos en los extremos. Se produce una onda con una frecuencia fundamental y sus armónicos, que son ondas de frecuencias múltiplos de la frecuencia fundamental. En la fig.5.36 se observa la frecuencia fundamental o primer armónico, y como la distancia entre dos nodos consecutivos es de media longitud de onda $\lambda_1/2$, ésta distancia debe ser igual a la longitud L de la cuerda. De aquí se deduce la longitud de onda y la frecuencia en función de la velocidad v de propagación de la onda por la cuerda.

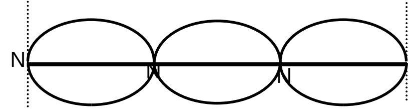


Fig.5.38. Tercer armónico en una cuerda.

N

$$\frac{\lambda_1}{2}=L\,; \quad \lambda_1=2L\,; \qquad f_1=\frac{v}{\lambda_1}=\frac{v}{2L}$$

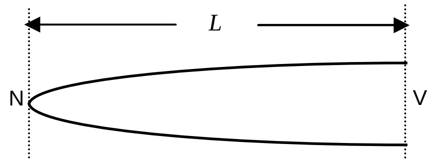


Fig.5.39. Primer armónico en un tubo sonoro.

Con el segundo armónico hay una nueva frecuencia, fig.5.37.

$$2\frac{\lambda_2}{2}=L\,; \quad \lambda_2=L\,; \qquad f_2=\frac{v}{\lambda_2}=\frac{v}{L}=\frac{2\,v}{2L}$$

Con el tercero la nueva frecuencia, fig.5.38.

$$3\frac{\lambda_3}{2}=L\,; \quad \lambda_3=\frac{2}{3}L\,; \qquad f_3=\frac{v}{\lambda_3}=\frac{v}{2L/3}=\frac{3v}{2L}$$

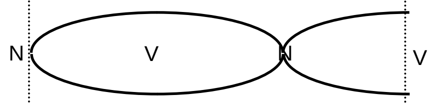


Fig.5.40. Segundo armónico en un tubo sonoro.

Con el armónico de orden n (número natural), se verifica para la frecuencia.

$$f_n=\frac{n\,v}{2L} \qquad [5.36]$$

Tubo abierto por un solo extremos. Se forma una onda estacionaria, con un nodo en el extremo fijo y con un vientre en el extremo abierto, donde la onda puede vibrar con la máxima amplitud. La distancia en longitudes de onda, entre un nodo y un vientre consecutivos es de $\lambda/4$. Este valor ha de coincidir con la longitud del tubo L. Fig.5.39.

Para el primer armónico la frecuencia fundamental vale.

$$\frac{\lambda_1}{4}=L\,; \qquad \lambda_1=4L\,; \qquad f_1=\frac{v}{\lambda_1}=\frac{v}{4L}$$

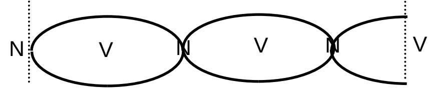


Fig.5.41. Tercer armónico de un tubo sonoro.

Compruébese analizando la fig.5.40 y fig.5.41, que la frecuencia correspondiente al armónico de orden n, verifica.

$$f_n=(2n-1)\frac{v}{4L} \qquad [5.37]$$

Para una columna abierta por los dos extremos, las frecuencias vienen dadas por una ecuación análoga a la [5.35].

La escala musical

La música consiste en una serie de sonidos del mismo o distinto tono y cualquier sucesión de tonos puede ser elegida, pero está comprobado que el efecto recibido es más agradable si la relación de frecuencias de los sucesivos tonos es una relación de números enteros pequeños. Como consecuencia se construye una escala musical y solo se utilizan frecuencias que se encuentran en la escala musical utilizada.

Dos tonos simultáneos o sucesivos forman un intervalo y el oído reconoce los intervalos de la escala musical por la razón entre sus frecuencias no por su diferencia. Ejemplos de relaciones sencillas empleadas en la escala musical son: 3/2, 4/3, 5/3, 5/4, 9/8 y 15/8.

La escala diatómica se compone de ocho notas con frecuencias tales que los intervalos entre la primera y las otras son los que acabamos de señalar. La frecuencia de la primera nota puede ser elegida arbitrariamente, las otras ya vienen condicionadas. Si el *do* natural en el piano viene dado por una frecuencia de 256 Hz, entonces las frecuencias e intervalos vienen dados en la tabla.

Nota	Frecuencia	Relación con *Do*
Do	256	1
Re	288	9/8
Mi	320	5/4
Fa	341	4/3
Sol	384	3/2
La	427	5/3
Si	480	15/8
Do	512	2/1

Como la razón 2/1 ocurre con la nota octava, este intervalo recibe el nombre de *octava.* La relación 5/4 recibe el nombre de *tercera mayor,* 4/3 el de *cuarta mayor*, 3/2 el de *quinta mayor* y 5/3 el de *sexta mayor.*