TEMA 4. OSCILACIONES

4.1 El movimiento armónico simple: m.a.s.

En la naturaleza se presentan muchos fenómenos, en los que ciertas magnitudes físicas cambian con el tiempo, mediante oscilaciones realizadas a uno y otro lado de un cierto valor. Algunos de estos fenómenos pueden observarse fácilmente, como las oscilaciones de un muelle o el movimiento de un péndulo, pero otros no son observables por nuestros sentidos, como las oscilaciones de las moléculas y átomos que constituyen la materia. Sin embargo, estos fenómenos tienen en común unas propiedades características que permiten estudiarlos con una ecuación muy similar.

El ejemplo más sencillo que se puede considerar lo constituye el oscilador armónico simple, fig.4.1, que está formado por un muelle unido a una masa *m*, que puede oscilar en línea recta a uno y otro lado de la posición x_0.

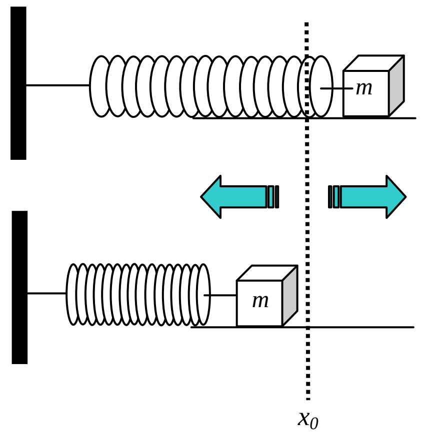


Fig.4.1. Un muelle oscilando a uno y a otro lado de una posición de equilibrio x_0, constituye un oscilador armónico.

4. 2 La fuerza elástica

Los cuerpos pueden cambiar sus dimensiones cuando se le aplican fuerzas, a pesar de que existen fuerzas interiores que se oponen a estos cambios. Un cuerpo se llama elástico, cuando adquiere la forma primitiva al cesar la acción deformadora.

El ejemplo más sencillo lo constituye un muelle, que se puede alargar bajo una fuerza de tracción, o encoger si ésta es de compresión. El muelle deformado reacciona contra la fuerza exterior, con otra fuerza de sentido contrario que se llama fuerza recuperadora.

Consideremos un muelle de longitud natural l_0, al que se le aplica una fuerza de intensidad creciente en el extremo, por medio de un gancho de masa despreciable, fig.4.2. El muelle se va alargando y representando gráficamente los valores de la fuerza aplicada F' en ordenadas y el alargamiento $(l - l_o)$ en abscisas, se obtiene una gráfica como la de la fig.4.3, cuya ecuación es la de la recta, $F' = k(l - l_o) = k\,x$; conocida como *ley de Hooke*. La magnitud *k es la constante recuperadora o elástica del muelle* y se determina experimentalmente mediante la pendiente de la recta.

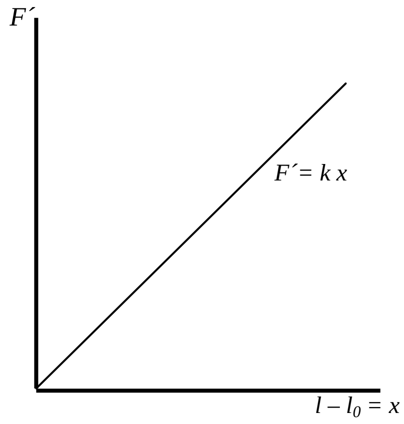


Fig.4.3 En un muelle deformado, las fuerzas aplicadas son proporcionales a los alargamientos que producen ley de Hooke.

Cuando el muelle está deformado, fig.4.9, a la fuerza F' aplicada al gancho el muelle responde con otra, la fuerza recuperadora *F*, aplicada también al gancho, igual y de sentido contrario a la anterior, que lo deja en equilibrio.

$$F = -F' = -k\,(l - l_o) = -\,k\cdot x \qquad (4.1)$$

De ec.(4.8) se deduce que *F*, tiene signo negativo si es $x > 0$ y el muelle está alargado y *F* tiene signo positivo si $x < 0$ y el muelle está comprimido.

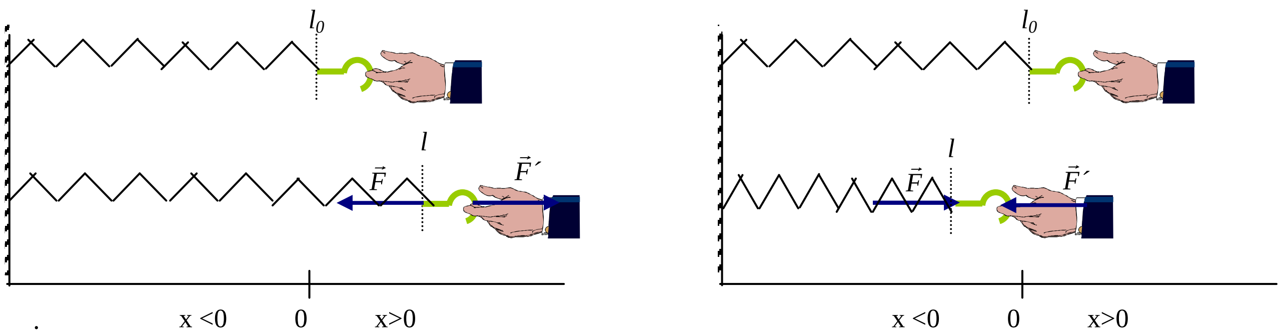


Fig.4.2. La fuerza recuperadora *F* cambia de sentido según que el muelle esté estirado o comprimido. En cualquier caso siempre apunta hacia la posición de equilibrio 0.

Ejemplo

Un muelle de longitud natural 25 cm, se estira con una fuerza de 20 N, alargándose hasta 30 cm. Halla la longitud que tendrá este muelle cuando se suspenda de él una masa de 1,5 kg en un lugar donde la intensidad de la gravedad vale 9,8 N/kg.

De la ley de Hooke se obtiene la constante elástica del muelle:

$$k = \frac{F´}{l - l_0} = \frac{20 \ N}{0{,}30 \ m - 0{,}25 \ m} = 400 \ \frac{N}{m}$$

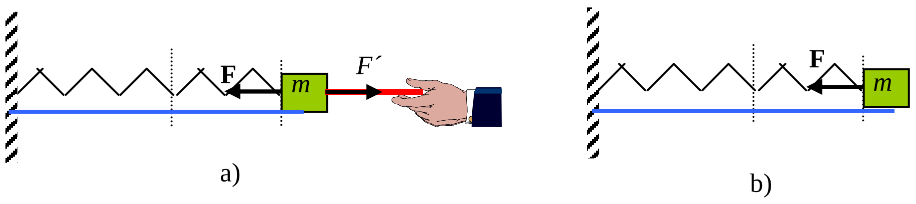
El peso es ahora la fuerza deformadora. Al suspenderlo se origina un alargamiento:

$$x = l - l_0 = \frac{P}{k} = \frac{1{,}5 \ kg \cdot 9{,}8 \ N/kg}{400 \ \frac{N}{m}} = 0{,}037 \ m = 3{,}7 \ cm ,$$

La longitud del muelle estirado es: $l = l_0 + x = 25 \ cm + 3{,}7 \ cm = 28{,}7 \ cm$

4.3 Dinámica del movimiento armónico simple

Consideremos un muelle horizontal de masa despreciable, unido a un cuerpo de masa *m*, que se encuentra situado sobre una superficie ideal sin rozamiento. Si aplicamos a la masa una fuerza *F´* el muelle se alarga y ejerce sobre ésta una fuerza recuperadora *F*, fig.4.4a.



a) b)

Fig.4.4. a) La fuerza *F´* aplicada a la masa *m*, alarga el muelle. b) Cuando cesa de actuar *F´*, la fuerza recuperadora *F*, pone al sistema en movimiento.

Si hacemos que la fuerza aplicada *F´* deje de actuar, se rompe el equilibrio entre las dos fuerzas y entonces la fuerza recuperadora *F* proporcionará a la masa *m*, una aceleración de acuerdo con la segunda ley de Newton F = m · a

Como además de ec.(4.1) es $F = - k \cdot x$, igualando ambas expresiones resulta para la aceleración.: $- k \cdot x = m \cdot a$; Pero la aceleración es $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

sustituyendo: $-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$ que se escribe como: $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$ (4.2)

Que recibe el nombre de ecuación diferencial del oscilador armónico simple.

Se demuestra que las soluciones de esta ecuación son las funciones armónicas:

$x = A sen(\omega t + \theta_o)$ o bien la función coseno $x = A cos(\omega t + \varphi_0)$

Que se diferencian en la fase inicial θ_0 ó φ_0

Generalmente se prefiere tomar como ecuación del m.a.s.

$$\boldsymbol{x = A\, sen(\omega t + \theta_o)} \quad (4.3)$$

Fotografía del puente sobre el río Tacoma.

En la fotografía se ve el estado en que quedó el puente sobre el río Tacoma en los Estados Unidos, al entrar en vibraciones de gran amplitud.

Las vibraciones mecánicas se transmiten a través de las máquinas, edificios, terreno, puentes etc. Pueden resultar muy perjudiciales cuando su frecuencia coincide con la natural o propia del objeto que entra en vibración, pues entonces las vibraciones son de extraordinaria amplitud y el cuerpo puede llegar a romperse.

***x* es la elongación.** *Distancia que separa a la masa oscilante en cualquier instante t, de la posición de equilibrio.* Aparece representada en la fig.4.4.
***ω* es la pulsación o frecuencia angular,** *se mide en rad/s.*

$(\omega t + \theta_0)$ es la fase.

θ_0 es la fase inicial. *Permite en la ecuación (4.2) situar la posición que ocupa la masa oscilante, en el instante inicial $t = 0$.*

Para determinar el valor de la pulsación ω vamos a calcular la derivada segunda de x respecto del tiempo al cuadrado en (4.3) y después vamos a sustituirla en la ecuación diferencial, junto con el valor de la elongación x de (4.3)..

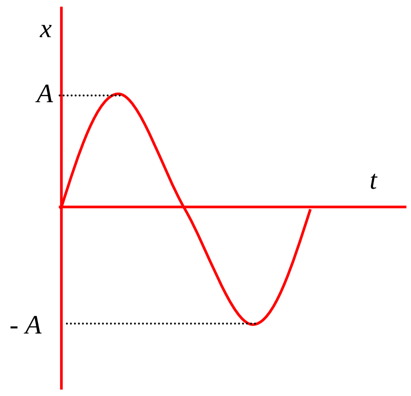


Fig.4.4. Representación gráfica de la elongación x en función del tiempo t, cuando es cero la fase inicial. Observa que es como la función seno, variando únicamente, en el valor de la amplitud que en lugar de 1, vale A..

$$\frac{dx}{dt} = A\omega\cos\left(\omega t + \theta_0\right) \; ; \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\, sen\left(\omega t + \theta_0\right)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$-A\omega^2\, sen\left(\omega t + \theta_0\right) + \frac{k}{m} A sen\left(\omega t + \theta_0\right) = 0$$

$$\left(-\omega^2 + \frac{k}{m}\right) A sen\left(\omega t + \theta_0\right) = 0$$

Como $A sen\left(\omega t + \theta_0\right)$ no es cero en todo instante de tiempo t, necesariamente debe ser cero el paréntesis para que se satisfaga la ecuación anterior.

$$\left(-\omega^2 + \frac{k}{m}\right) = 0 \; ; \quad \text{de donde se obtiene despejando,} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (4,4)$$

La pulsación está relacionada con el periodo *T*, por $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Sustituyendo (4, 4) resulta $\quad T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} \qquad (4.5)$

El periodo de oscilación depende de la masa oscilante y de la constante recuperadora del muelle, aunque como se ve en (4.5) no depende de la amplitud de la oscilación.

Ejemplo

Una masa de 0,4 kg, está unida a un muelle situado horizontalmente de constante recuperadora $k = 400$ N/m. Se separa de la posición de equilibrio y se deja oscilar libremente. Determina el periodo de oscilación y la frecuencia.

Aplicando ec. (4.11) resulta.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,4}{400}} = 3{,}16.10^{-2}\,s\;; \qquad F = \frac{1}{T} = \frac{1}{3{,}16.10^{-2}\,s} = 31{,}6\,Hz$$

Otras magnitudes características del m.a.s. son:

El periodo T, que es el tiempo que emplea la partícula en efectuar una vibración de ida y vuelta completa.

La frecuencia f, que es el número de oscilaciones completas que da la partícula oscilante en la unidad de tiempo. La unidad de frecuencia es el hertz, Hz, que corresponde con la frecuencia de una partícula que da una vibración completa por segundo.

La frecuencia y el periodo son magnitudes inversamente proporcionales:

$$f = \frac{1}{T} \qquad (4.4)$$

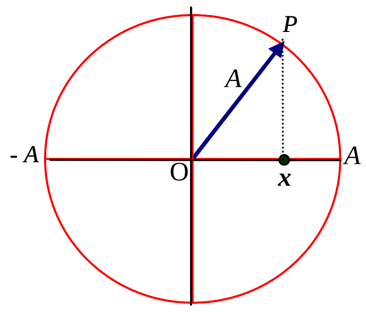


Fig.4.5. Si consideramos un punto P que recorre la circunferencia con movimiento circular uniforme (ω constante), y proyectamos sobre un diámetro las distintas posiciones que en la circunferencia va ocupando.

El movimiento de la proyección del punto P sobre el diámetro, designada por x en la figura, es en línea recta entre $-A$ y A, y constituye un movimiento armónico simple.

La frecuencia angular ω, está relacionada con el periodo y la frecuencia por las ecuaciones:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f \qquad (4.5)$$

ω se mide en *rad/s.*

Ejemplo

Un m.a. s. viene expresado con la ecuación: x = 2 sen (2πt - π/4), donde x se mide en milímetros y t en segundos. Determina: a) Amplitud, valor de la fase y de la fase inicial. b) Pulsación, periodo y frecuencia. c) Elongación x, en el instante t =0,5 s.

a) Por comparación con ec.(4.1) se comprueba que:

A = 2 mm ; fase: $\theta = \omega t + \theta_0 = 2\pi t - \pi/4$; fase inicial: $\theta_0 = -\pi/4$ *rad*

b) La frecuencia angular: $\omega = 2\pi \frac{rad}{s}$; el periodo: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\ rad}{2\pi\ rad/s} = 1s$

La frecuencia: $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1s} = 1Hz$

c) La elongación es:

$$x = 2 \text{ sen } (2\pi t - \pi/4) = 2 \text{ sen } (2\pi \cdot 0{,}5 - \pi/4) = 2 \text{ sen } (\pi - \pi/4) = 2 \text{ sen } 3\pi/4$$
$$x = 1{,}41 \text{ mm}$$

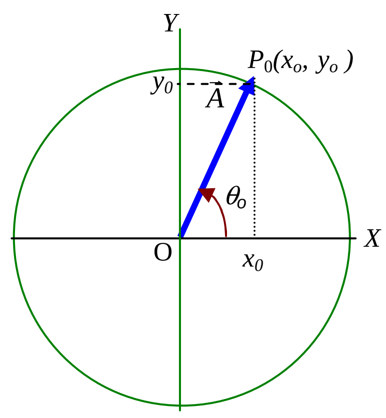


Fig.4.5a. El vector de posición del punto P_0 forma con el eje X un ángulo θ_o

4.4 Representación vectorial del m.a.s.

Fijemos nuestra atención en un vector $\vec{A}$ que tiene su origen en un punto fijo O, donde hemos situado un sistema cartesiano OXY.

Inicialmente el vector $\overrightarrow{OP_o}$, forma un ángulo θ_o con la dirección positiva del eje OX, fig. 4.5a, y sus componentes cartesianas son las coordenadas del punto P_0 que designamos por (x_0, y_0). Estas coordenadas se relacionan con el módulo del vector, $\left|\overrightarrow{OP_o}\right| = A$, por:

$$x_0 = A \cos \theta_o \ ; \qquad y_0 = A \text{ sen } \theta_o$$

Imaginemos que desde esta posición P_o el vector $\vec{A}$ empieza a girar, con velocidad angular constante ω, fig.4.5b. En un instante de tiempo t, el ángulo que formará con el eje OX será $\theta = \omega t + \theta_0$, y el extremo del vector habrá recorrido un arco de circunferencia hasta situarse en la posición P. Ahora sus componentes cartesianas son:

$$x = A \cos (\omega t + \theta_o); \qquad y = A \text{ sen } (\omega t + \theta_o)$$

Resultando que tanto las funciones seno, como coseno, son igualmente válidas para representar un movimiento armónico simple. En consecuencia, las componentes cartesianas de un vector giratorio de módulo constante $\vec{A}$, que gira con velocidad angular constante ω, representan a dos movimientos armónicos simples, efectuados según dos ejes perpendiculares entre sí.

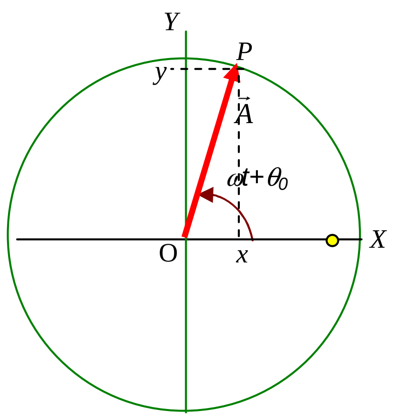


Fig.4.5b. Cuando el vector giratorio $\overrightarrow{OP} = \vec{A}$ rota con velocidad angular constante ω, entonces sus componentes cartesianas x, e y proyectadas , según los ejes X e Y, representan sendos movimientos armónicos simples.

Ejemplo

Un vector giratorio de módulo 20 cm, rota con velocidad angular ω = 2 rad/s manteniendo su origen sobre un punto fijo O. Determina las componentes cartesianas del vector giratorio en función del tiempo, sabiendo que en el instante inicial forma con el eje OX, un ángulo de 30º.

Expresemos $\theta_0 = 30º$, *en radianes:* $\theta_o = 30 \frac{\pi \text{ rad}}{180} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$

$$x = A \cos (\omega t + \theta_o) = 0{,}2 \cos (2t + \frac{\pi}{6}); \quad y = A \text{ sen } (\omega t + \theta_o) = 0{,}2 \text{ sen } (2t + \frac{\pi}{6})$$

Ejemplo

Un m.a.s. tiene de amplitud A = 5.10^{-2} m, frecuencia F = 4 Hz y en el instante t = 0,1 s, la elongación vale $1{,}9.10^{-2}$ m. Determina la fase inicial y la ecuación de la elongación x, en función del tiempo.

Tomando la ecuación más habitual, $x = A \text{ sen } (\omega t + \theta_o) = A \text{ sen } (2\pi f t + \theta_O)$ y sustituyendo:

$$1{,}9.10^{-2} = 5.10^{-2} \text{ sen}\left(2\pi 4 \cdot 0{,}1 + \theta_O\right) = 5.10^{-2} \text{ sen } \left(0{,}8\pi + \theta_O\right)$$

$$0{,}8\pi + \theta_O = \text{arc sen} \frac{1{,}9.10^{-2}}{5.10^{-2}} = \text{arc sen} 0{,}38 = 0{,}39 \text{ rad}; \qquad \theta_O = 0{,}39 - 0{,}8\pi = -2{,}1 \text{ rad}$$

$$x = 5.10^{-2} \text{ sen } (8\pi t - 2{,}1)$$

4.5 Velocidad y la aceleración en el m.a.s.

La posición de una partícula que se encuentre oscilando con un movimiento armónico simple en el eje X, tiene una ecuación que viene dada por ec. (4.3)

$$x = A \text{ sen } (\omega t + \theta_o)$$

La velocidad, al igual que en todos los movimientos, es la derivada de la ecuación de la posición respecto del tiempo.

$$v=\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}A\,sen(\omega t+\theta_O)=A\omega\cos(\omega t+\theta_O) \qquad (4.6)$$

Cuando la partícula va hacia la derecha, fig. 4.6, en el sentido del vector unitario $\vec{i}$, la velocidad tiene signo positivo pues el *cos* $(\omega t+\theta_o)>0$, pero cuando llega a la posición extrema en $+A$, su velocidad se anula y el móvil cambia el sentido del movimiento, hasta alcanzar la posición $-A$, siendo la velocidad negativa por resultar *cos* $(\omega t+\theta_o)<0$. Al paso por el origen O, la velocidad alcanza en valor absoluto, su valor máximo.

La aceleración se obtiene derivando la velocidad respecto del tiempo.

$$a=\frac{d\,v}{d\,t}=\frac{d}{dt}A\omega\cos(\omega t+\theta_O)=-A\omega^2\,sen(\omega t+\theta_O) \qquad (4.7)$$

Las ecuaciones: (4.3), (4.6) y (4.7) son dependientes de senos y cosenos. Estas funciones son periódicas de modo que los valores que van tomando se repiten una y otra vez, a medida que el tiempo se incrementa en un periodo *T.* Además, la velocidad y la aceleración tienen igual periodo que la elongación, pero sus valores máximos y mínimos no coinciden en el mismo instante. Se dice que estas funciones están desfasadas. Fig.4.7.

Por otra parte, los valores que toman la velocidad en valor absoluto y la aceleración, se repiten al volver a pasar la partícula por la misma posición x, de modo que resulta muy práctico encontrar nuevas ecuaciones para estas magnitudes, en función de la citada elongación x.

En la ec.(4.6) se expresa el coseno en función del seno con la ecuación fundamental de la trigonometría. Después con ec.(4.3) se pone en función de x.

$$v=A\omega\sqrt{1-sen^2(\omega t+\theta_O)}=A\omega\sqrt{1-\left(\frac{x}{A}\right)^2}=A\omega\sqrt{\frac{A^2-x^2}{A^2}}$$

Por cambiar la velocidad de sentido cada medio periodo se debe expresar:

$$v=\pm\omega\sqrt{A^2-x^2} \qquad (4.8)$$

El valor máximo de la velocidad es en $x=0$; siendo su valor $v=\pm\,\omega A$. Por el contrario, en los extremos es $x=\pm A$; y la velocidad es nula, $v=0$.

Relacionar la aceleración a con la elongación x, es todavía más sencillo, basta con reemplazar la ec.(4.3) en la ec.(4.7), resultando.

$$a=-A\omega^2\,sen(\omega t+\theta_O)=-\omega^2\,A\,sen(\omega t+\theta_O)=-\omega^2 x \qquad (4.9)$$

En el movimiento armónico simple, la aceleración es en cada instante proporcional a la elongación y de signo contrario. El signo menos indica que cuando x es negativo la aceleración es positiva y el vector aceleración apunta en el sentido del vector unitario $\vec{i}$, fig.4.8. Por el contrario cuando x es positiva, la aceleración tiene signo negativo y el vector aceleración apunta en sentido contrario al anterior.

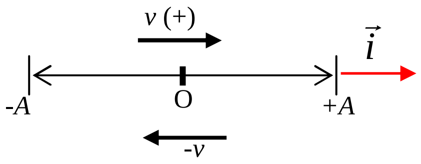


Fig. 4.6. La velocidad de la partícula que efectúa un m.a.s. por el eje X, se considera positiva cuando se desplaza en el sentido del vector unitario $\vec{i}$, y negativa cuando se desplaza en sentido contrario.

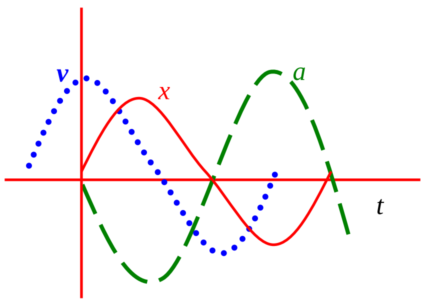


Fig.4.7. Representación de la elongación x, velocidad v y aceleración a, de un m.a.s., en función del tiempo. Las tres magnitudes tienen el mismo periodo.
Observa que la velocidad va adelantada $\pi/2$ respecto de la elongación, mientras que la aceleración va en oposición de fase con la elongación, (mientras que una toma su valor máximo la otra lo toma mínimo).

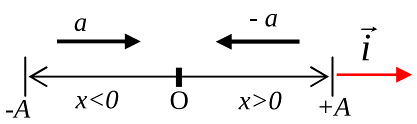


Fig.4.8. En el movimiento armónico simple, la aceleración que actúa sobre la partícula está apuntando siempre hacia la posición de equilibrio O. Se trata además, de un movimiento con aceleración no constante.

Ejemplo

La ecuación del m.a.s. de una partícula es: $x = 2\ sen\ (3t - 5)$, donde x se mide en mm y el tiempo en s). Determina:

a) Velocidad en el instante t= 2 s.
b) Velocidad cuando la posición del móvil sea $x = 1{,}5\ mm$.
c) La velocidad máxima.

a) La ecuación de la velocidad la obtenemos derivando la ecuación de la elongación respecto del tiempo.

$$v=\frac{dx}{dt}=3\cdot 2\cos\left(3t-5\right)=6\cos\left(3t-5\right)$$

En el instante *t = 2 s ;* $v=6\cos\left(3\cdot 2-5\right)=6\ \cos\left(1\,rad\right)=3{,}24\ \frac{mm}{s}$

b) En la posición $x = 1{,}5\ mm$, la velocidad se calcula por la ec. (4.6), donde la pulsación ω se determina de la ecuación de la elongación x , puesto que es el coeficiente de t, . En este caso toma el valor $\omega = 3\ rad/s$. Sustituyendo :

$$v=\pm\omega\sqrt{A^2-x^2}=\pm 3\sqrt{2^2-1{,}5^2}=\pm 3{,}97\frac{mm}{s}$$

c) La velocidad máxima se puede determinar de la ecuación de la velocidad en función del tiempo, cuando el coseno tome su valor máximo, que es la unidad. Resulta entonces $v = 6\ mm/s$.

Por otra parte, la velocidad es máxima en $x = 0$, de modo que sustituyendo.

$$v=\pm\omega\sqrt{A^2-x^2}=\pm\omega\ A=\pm 3\frac{rad}{s}2\,mm=\pm 6\frac{mm}{s}$$

Ejemplo

Determina la aceleración de la partícula que efectúa el m.a.s. del ejemplo 4, en los siguientes casos: a) En el instante t = 2 s. b) Cuando pasa por la posición $x = 1{,}5\ mm$.. c) La aceleración máxima.

a) La aceleración es la derivada respecto del tiempo de la velocidad.

$$a=\frac{dv}{dt}=-3\cdot 6\ sen\left(3t-5\right)=-18\,sen\left(3t-5\right)\ ;\quad a=-18\,sen\left(3\cdot 2-5\right)=-15{,}15\ \frac{mm}{s^2}$$

b) $a=-\omega^2\,x=-3^2\cdot 1{,}5=-13{,}5\frac{mm}{s^2}$

c) La aceleración máxima es: $a=-\omega^2\,A=-3^2\cdot 2=-18\frac{mm}{s^2}$

4.6 Energía potencial del oscilador armónico simple

Es un hecho experimental que un muelle alargado o comprimido, si se deja libre, espontáneamente se pone en movimiento. La energía ligada con estas situaciones, se conoce como energía potencial elástica y ha de ser igual al trabajo empleado para alargarlo o comprimirlo.

Si aplicamos al muelle una fuerza F' muy lentamente de manera que vaya actuando a través de muchos estados de equilibrio, fig.4.9, conseguiremos alargar el muelle sin que gane energía cinética. De este modo todo el trabajo realizado por F' para alargar el muelle en una longitud x, se va a invertir en energía potencial elástica del mismo.

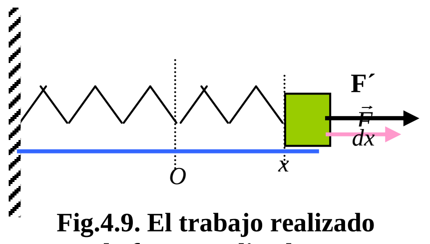


Fig.4.9. El trabajo realizado por la fuerza aplicada, actuando a través de sucesivos estados de equilibrio, se acumula en el muelle como energía potencial elástica.

La fuerza aplicada varía a lo largo del camino de acuerdo con la ley de Hooke $F' = k \cdot x$, de modo que se trata de una fuerza no constante y el trabajo se tiene que determinar mediante una integración. La fuerza F' realiza trabajo desde la posición de equilibrio O, hasta una cierta posición x.

$$W = \int_0^x F'\, dx \cos 0 = \int_0^x k\,x\, dx = \frac{1}{2} k\, x^2$$

El trabajo realizado sobre el muelle queda almacenado como energía potencial elástica.

$$U_E = \frac{1}{2} k\, x^2 \qquad (4.10)$$

Recuerda

<u>El trabajo que hace una fuerza, es el producto del módulo de la fuerza por el módulo del desplazamiento por el coseno del ángulo que forman.</u>

La energía potencial elástica es máxima en la amplitud $x = \pm A$ y nula en la posición de equilibrio $x = 0$.

De otro modo, cuando la fuerza aplicada F' no supera el límite elástico del muelle, entre la fuerza y los alargamientos se verifica la ley de Hooke. La representación gráfica del módulo de ésta fuerza en función de los alargamientos es una línea recta, fig. 4.10. El área entre esta recta y el eje X, proporciona también el valor del trabajo. En efecto:

$$W = \frac{1}{2} base \cdot altura = \frac{1}{2} x \cdot F' = \frac{1}{2} x \cdot k\, x = \frac{1}{2} k\, x^2$$

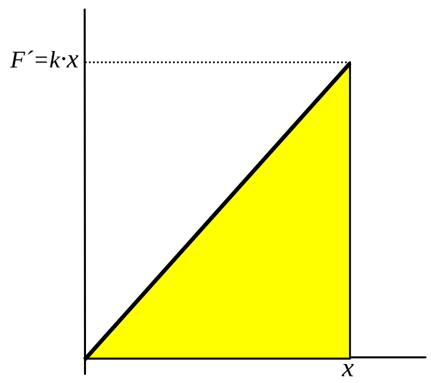


Fig.4.10. El trabajo realizado por la fuerza aplicada se calcula por el valor del área del triángulo, bajo la recta y el eje horizontal, de amarillo en la figura. Área = ½ Base x altura.

4.7 Energía cinética del oscilador armónico simple

Cuando el muelle oscila libremente la masa unida al mismo tiene una cierta velocidad, si exceptuamos las dos posiciones extremas. En consecuencia además de energía potencial posee energía cinética.

En una cierta posición x, conoceremos el valor de la energía cinética haciendo uso de la ecuación (4.8).

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left[\omega \sqrt{A^2 - x^2} \right]^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 \left(A^2 - x^2 \right)$$

Ahora bien de ec.(4.4) deducimos que $m \cdot \omega^2 = k$. Sustituyendo:

$$E_c = \frac{1}{2} k \left(A^2 - x^2 \right) \qquad (4.11)$$

La ecuación (4.11) indica que la energía cinética es nula en $x = \pm A$, es decir en las posiciones correspondientes a la amplitud, y máxima en la posición de equilibrio $x = 0$.

4.8 Energía mecánica del oscilador armónico simple

Cuando el muelle oscila unido a una cierta masa, tiene dos energías la cinética y la potencial. La suma de ambas es la energía mecánica y vamos a determinarla en una posición cualquiera *x*.

$$E_m = E_c + U_E = \frac{1}{2}k\left(A^2 - x^2\right) + \frac{1}{2}k\,x^2 = \frac{1}{2}k\,A^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \qquad (4.12)$$

La energía mecánica no depende de la posición *x* que ocupa la masa oscilante, únicamente, de la constante recuperadora *k* y de la amplitud de la oscilación *A*. En consecuencia, la energía mecánica del oscilador es constante y cuando esto sucede se dice que la fuerza que actúa durante el movimiento, es una fuerza conservativa.

El oscilador armónico en ausencia de fuerzas de rozamiento, (como las de fricción con el aire y con la superficie horizontal), después de que haya empezado a oscilar, mantendría las oscilaciones indefinidamente.

En la fig.4.11 se representan las energías: cinética, potencial y mecánica. Observa que en cada punto, la energía mecánica es la suma de las ordenadas correspondientes a la energía potencial y a la cinética, valiendo lo mismo (es la línea horizontal).

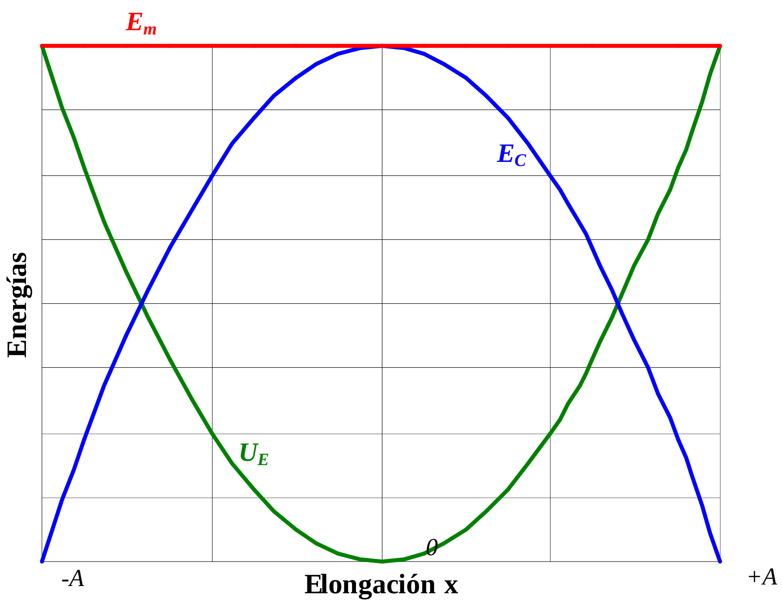
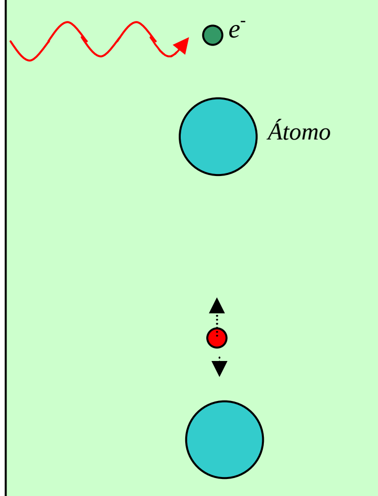


Fig.4.11. Energías del oscilador armónico simple. En verde la energía potencial elástica, en azul la energía cinética y en rojo la energía mecánica.



<u>Los electrones ligados a los átomos vibran como los osciladores, cuando son excitados por las componentes del campo eléctromagnético de las ondas luminosas.</u>

El oscilador armónico simple es un excelente modelo en muchos campos de la Física.

Ejemplo 8

Un muelle de k = 1000 N/m oscila con una amplitud de 0,10 m. Determina sus energías: potencial, cinética y mecánica, cuando pasa por la posición x = 0,05 m.

$$U_E = \frac{1}{2} k\, x^2 = \frac{1}{2} 1000 \cdot 0{,}05^2 = 1{,}25\ J\ ; \qquad E_C = \frac{1}{2} k \left(A^2 - x^2 \right) = \frac{1}{2} 1000 \left(0{,}10^2 - 0{,}05^2 \right) = 3{,}75\ J$$

$$E_m = \frac{1}{2} k\, A^2 = \frac{1}{2} 1000 \cdot 0{,}10^2 = 5{,}00\ J$$

Nota como la energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial.

4.9 Fenómenos periódicos

En la Naturaleza existen muchos fenómenos que se repiten una y otra vez a intervalos iguales de tiempo, se llaman fenómenos periódicos, por ejemplo, la rotación de la Tierra alrededor de su eje, su movimiento de traslación alrededor del Sol, las vibraciones de un resorte, el movimiento de un péndulo, etc.

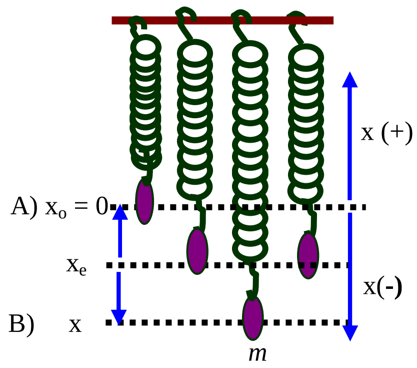


Fig.4.11. Al suspender del muelle la masa *m*, en el punto A, la masa empieza a oscilar entre los puntos A y B, situados equidistantes del punto x_e . Observa que se considera positivo el signo de x, por encima de $x_o = 0$ y negativo por debajo.

4.10 Oscilaciones de un muelle

Vamos a estudiar las oscilaciones que experimenta un muelle, cuando estando vertical y en equilibrio con su longitud natural, se le suspende una masa *m*, que lo alarga y le obliga a realizar oscilaciones, fig.4.11.

Tomaremos un origen de referencia $x_o = 0$ en la posición inicial *A,* de modo que al colgar la masa ésta se mueve hasta el punto *B*, de posición *x*, cuyo signo no prejuzgamos de antemano. El muelle empieza a oscilar entre dos posiciones extremas, permaneciendo así indefinidamente.

Desde el punto de vista de la energía, la masa *m* suspendida modifica sus energías, potencial gravitatoria y cinética, mientras que el muelle considerado de masa despreciable, solo varía su energía potencial elástica.

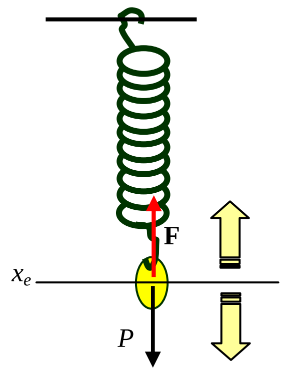


Fig.4.12. Fuerzas sobre una masa oscilando suspendida de un muelle. Cuando pasa por la posición de equilibrio x_e el peso *P* y la fuerza recuperadora del muelle *F*, son iguales y de sentidos contrarios, verificando sus módulos: $F = P = mg$

Sobre la masa suspendida fig.4.12, actúan el peso y la fuerza elástica del resorte siendo ambas conservativas, por lo que la energía mecánica del sistema se conserva y en consecuencia su variación total será nula.

$$\Delta E_P \ \ (gravitatoria) \ + \ \Delta E_c \ \ (cinética) \ + \ \Delta U_E \ \ (elástica) \ = \ 0$$

$$\left[E_P(B) - E_P(A) \right]_{Grav.} + \left[E_C(B) - E_c(A) \right] + \left[U_E(B) - U_E(A) \right]_{Elást.} = \ 0$$

$$\left[mg\,x - 0 \right] + \left[\frac{1}{2} m v^2 - 0 \right] + \left[\frac{1}{2} k\, x^2 - 0 \right] = \ 0\ ;$$

Ordenando la ecuación de segundo grado: $\frac{1}{2} k\, x^2 + mg\, x + \frac{1}{2} m v^2 = 0$

Para determinar las posiciones extremas entre las que oscila la masa unida al resorte, debemos considerar que en éstas posiciones las velocidades son nulas, para lo que hacemos $v = 0$ en la ecuación anterior.

$$\frac{1}{2}k\,x^2 + m\,g\,x = 0\ ; \qquad \left(\frac{1}{2}k\,x + mg\right)x = 0$$

Las soluciones son: $x_1 = 0\ ;$ $\qquad x_2 = -\dfrac{2\,m\,g}{k}$ (4.13)

La masa unida al muelle oscila en línea recta entre las posiciones indicadas x_1 y x_2 ; siendo la coordenada del punto medio x_e , de valor .

$$x_e = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0 + \left(\dfrac{-2\,mg}{k}\right)}{2} = -\frac{m\,g}{k} \qquad (4.14)$$

En esta posición la fuerza del muelle es igual y opuesta al peso, fig.4.12.

La masa acoplada al muelle oscila por arriba y por debajo del punto $x_e = -\dfrac{m\,g}{k}$, con una amplitud que vale en valor absoluto:

$$|A| = \left|-\frac{mg}{k}\right| = \frac{m\,g}{k} \qquad (4.15)$$

Observa, que la masa no oscila arriba y abajo de la posición inicial, correspondiente con la longitud natural del muelle, punto *A*, donde habíamos situado $x_o = 0$. Ahora oscila a uno y otro lado del nuevo punto de equilibrio x_e.

Ejemplo

De un muelle cuya constante elástica es k = 200 N/m se cuelga una masa de 2 kg. Determina la distancia máxima que se separa de la posición inicial, la posición alrededor de la cual oscila y la amplitud de la oscilación.

Empleando la ec.(4.15) : $x_2 = -\dfrac{2\,m\,g}{k} = -\dfrac{2 \cdot\ 2 \cdot 9{,}8}{200} = -0{,}196\,m = -\,19{,}6\,cm$

De la ec.(4.16) : $x_e = -\dfrac{m\,g}{k} = -\dfrac{2 \cdot 9{,}8}{200} = -0{,}098\,m = -9{,}8\,cm$

La amplitud se obtiene de aplicar ec.(4.17): $|A| = \dfrac{m\,g}{k} = \dfrac{2 \cdot 9{,}8}{200} = 0{,}098\,m = 9{,}8\,cm$

4.11 Estudio del péndulo simple

Un péndulo simple es una partícula de masa *m*, suspendida de un hilo inextensible de masa despreciable. Inicialmente la partícula se encuentra en equilibrio por acción de la tensión *T* del hilo y el peso *P*, fig.4.13. Sin embargo, si se separa de esta posición la partícula aumenta su energía potencial gravitatoria y después al dejarla libre espontáneamente se pone en movimiento, transformándola en energía cinética y empezando a oscilar.

Cuando alcanza de nuevo la posición de equilibrio, lleva velocidad y energía cinética por lo que rebasa esta posición y pasa al otro lado, hasta que toda la energía cinética se ha transformado de nuevo en energía potencial. El fenómeno se repite así de forma periódica, indefinidamente.

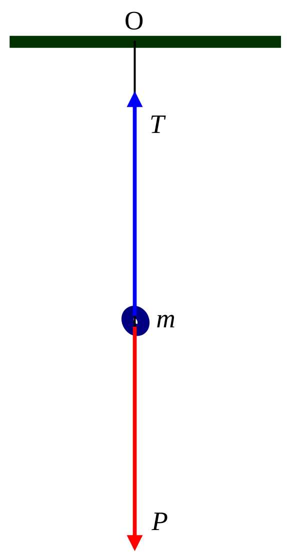


Fig.4.13. La masa *m* está en equilibrio con las fuerzas *T* y *P*.

Desde un punto de vista dinámico, sobre la masa *m*, están actuando su peso *P* y la tensión de la cuerda *T*. Si estas fuerzas se descomponen en cada instante, en componentes en la dirección del hilo y en la dirección de la tangente a la trayectoria, fig.4.14. Resulta:

- En la dirección del hilo la fuerza neta hacia O suministra la fuerza centrípeta que permite cambiar a *m* la dirección de su vector velocidad.

$$T - P\cos\theta = F_c$$

- En la dirección tangente a la trayectoria.

$$F = -P\,sen\,\theta = -mg\,sen\,\theta$$

El signo menos hay que introducirlo para tener en cuenta, que la fuerza *F* tiene sentido contrario al del crecimiento del ángulo θ. De la ecua-ción fundamental de la Dinámica resulta:

$$m\,a = -m\,g\,sen\,\theta\,; \qquad a = -g\,sen\,\theta$$

Se trata de un movimiento con aceleración no constante, que depende del seno del ángulo.

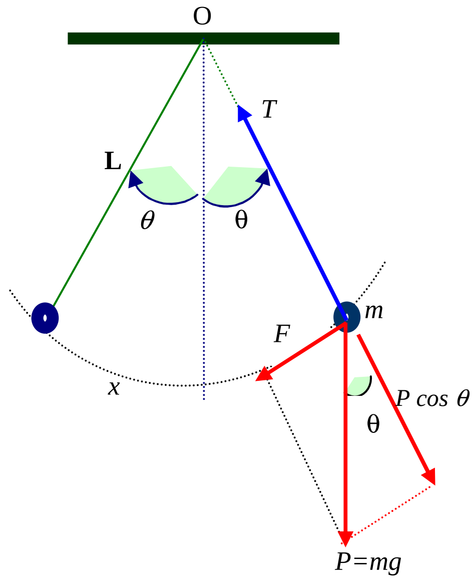


Fig.4.14. Descomposición de fuerzas en el péndulo simple. Solamente actúan el peso *P* y la tensión de la cuerda *T*.

Estamos interesados, en considerar únicamente oscilaciones de pequeña amplitud, para valores del ángulo θ menores de diez grados. En estos casos se puede aproximar el seno del ángulo, por su valor en radianes, es decir, reemplazar $sen\theta \approx \theta$ (siendo el error inferior al 0,6%). Sustituyendo:

$$a = -g\,\theta \qquad (4.16)$$

0BSERVA

$$1º = \frac{\pi\,rad}{180} = 0{,}01745\,rad$$

$$10º = 0{,}1745\ rad$$

$$sen\ 0{,}1745\ rad = 0{,}1736$$

$$\frac{0{,}1745 - 0{,}1736}{0{,}1736}100\ \% = 0{,}52\%$$

Como el arco de una circunferencia es igual al ángulo en radianes por el radio, de la fig.4.18 se deduce que $x = \theta \cdot L$. Sustituyendo en ec.(4.16).

$$a = -\frac{g}{L}x$$

El cociente *g/L* es constante y para la aproximación de ángulos muy pequeños, se obtiene una aceleración proporcional a la elongación *x*, y de signo contrario, de modo que en estas condiciones, el movimiento del péndulo se puede aproximar al de un movimiento armónico simple.

Comparando con la ec.(4.7) resulta para la frecuencia angular:

$$\omega^2 = \frac{g}{L}\,; \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

El periodo del péndulo *T*, que es el tiempo que emplea en una oscilación de ida y vuelta completas, se determina de la ec.(4.3).

$$\omega = \frac{2\pi}{T}\,; \qquad \Rightarrow \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad (4.17)$$

El periodo de un péndulo simple que oscila con pequeña amplitud, depende de la longitud del hilo y del valor de la aceleración de la gravedad del lugar.

Finalmente, si se suelta el péndulo desde un lateral situado a una altura *h* respecto del punto más bajo de la trayectoria, ¿cuánto vale su velocidad al pasar por este punto?, fig.4.15. El principio de conservación de la energía mecánica asegura que la energía potencial se transforma totalmente en cinética. en el punto más bajo de esa trayectoria.

$$m\,g\,h=\frac{1}{2}m\,v^2\,; \qquad \Rightarrow \qquad v=\pm\sqrt{2\,g\,h}=\sqrt{2\,g\,L(1-\cos\theta)} \qquad (4.18)$$

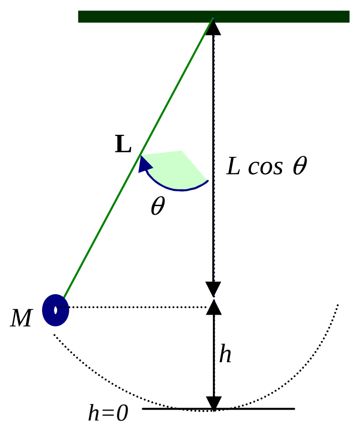


Fig.4.15. El péndulo se deja libre desde un punto *M*, situado a una altura *h* sobre la posición más baja de la trayectoria.

Si en lugar de la altura *h*, se conociese el ángulo θ que ha sido desplazado el hilo. Entonces *h* se calcula restando de la longitud del hilo *L*, la distancia $L\cos\theta$, ver la figura.

$h = L - L\cos\theta = L(1-\cos\theta)$

Ejemplo

La longitud de un péndulo simple es L = 1,9 m y oscila con un periodo T = 2,8s. Determina: a) el valor de la aceleración de la gravedad, g, en el lugar. b) Si el hilo se separa de la posición de equilibrio un ángulo de 8º, la velocidad al pasar por la posición vertical.

a) Aplicando la ec.(4.17), de la que se despeja *g* se obtiene:

$$g=\frac{2^2\,\pi^2\,L}{T^2}=\frac{4\,\pi^2\,1{,}9}{2{,}8}=9{,}57\,\frac{m}{s^2}$$

b) Aplicando la ec.(4.18) :

$$v=\sqrt{2g\,L(1-\cos\theta)}=\sqrt{2\cdot 9{,}57\cdot 1{,}9(1-\cos 8^{o})}=0{,}59\,\frac{m}{s}$$