1 GRAVITACIÓN UNIVERSAL

1.1 Evolución histórica

La gravitación da cuenta de la fuerza de interacción entre las masas del universo. Su conocimiento ha permitido entre otras aplicaciones, la descripción del movimiento de los astros en el espacio, lo que preocupó a los hombres del mundo antiguo, desde los babilonios, hasta egipcios y griegos.

El primer análisis riguroso, del movimiento de los planetas en el Sistema Solar fue realizado por Tolomeo en Alejandría, situando a la Tierra en el centro del Universo, (Teoría Geocéntrica), pero sin ofrecer ninguna explicación física, su auge alcanzó hasta el siglo XVI. Sin embargo, en 1543 surgió una nueva teoría debida a Nicolás Copérnico (astrónomo polaco) que colocaba al Sol en el centro del Universo y a los planetas describiendo órbitas circulares a su alrededor, (Teoría Heliocéntrica), fig.3.1.

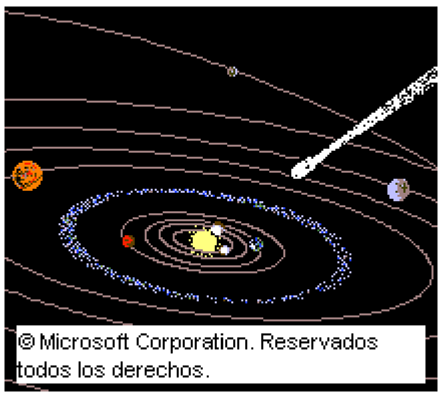


Imagen del sistema solar con las trayectorias elípticas de los planetas.

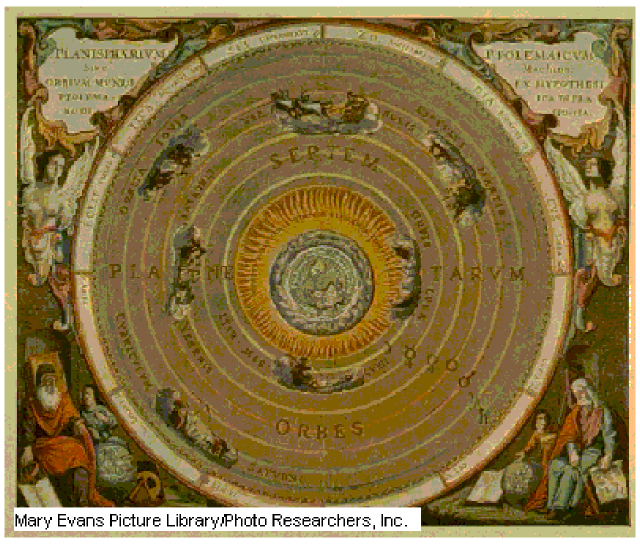
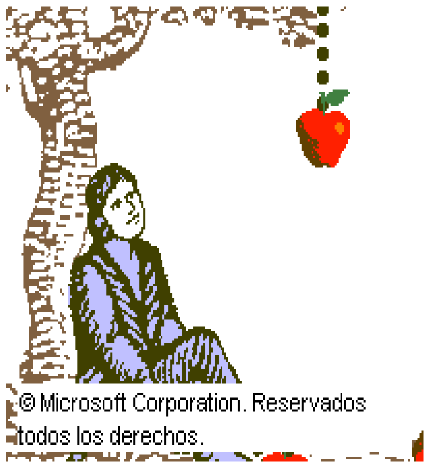


Fig.3.1. Modelo copernicano del sistema solar

Más tarde Kepler mostró que las órbitas de los planeta eran elípticas y que cumplían tres leyes que expresó en dos libros, *Astronomía nova* (1609) y *Harmonices mundi, Libri* (1619).



Avanzado el siglo XVII, Newton descubrió la razón física que explicaba el movimiento de los planetas, era una fuerza atractiva que sobre ellos ejercía el Sol y lo expresó en una ecuación matemática, conocida como Ley de Gravitación Universal. Fue su firme creencia de que las fuerzas que mueven los astros en el Universo, son de la misma naturaleza que las que mueven a los cuerpos en la Tierra y obedecen, por tanto, a sus mismas leyes la que le llevó a tan importante descubrimiento.

La tradición habla de la caída de una manzana que estimuló la imaginación de Newton, llevándole a pensar que la Luna debería caer sobre la Tierra siguiendo la misma ley, pero sigamos el razonamiento de Newton. Este determinó –ver apéndice de esta unidad- que en un segundo la Luna caía hacia la Tierra una distancia de $h_L = 1{,}3\ mm$, mientras que un objeto situado en la superficie terrestre en el mismo tiempo, caería $h_T = 4{,}9\ m$. Newton observó : que la relación entre estas dos longitudes era:

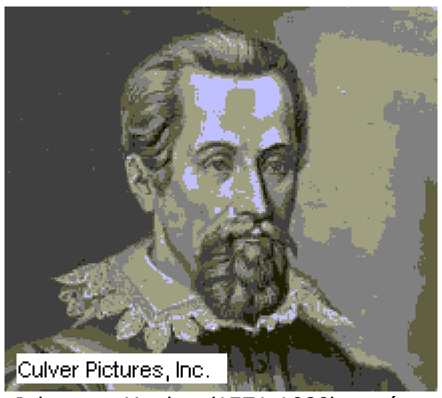
$$\frac{h_L}{h_T} = \frac{1{,}3.10^{-3}\ m}{4{,}9\ m} \approx \frac{1}{3700}$$

y sabía además que la distancia desde la Luna al centro de la Tierra r_L; era unas 60 veces el radio terrestre: $r_L \approx 60\ R_T$ .La relación entre sus cuadrados

$$\frac{R_T^2}{r_L^2} = \frac{R_T^2}{60^2\ R_T^2} = \frac{1}{3600}$$

Que es un valor muy próximo al anterior. Como el movimiento de caída de estos cuerpos es uniformemente acelerado, resulta que $h = ½\,gt^2$, y de aquí concluyó que la aceleración de caída que sufría cada uno, debería ser inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al centro de la Tierra.

$$\frac{g_L}{g_T} = \frac{R_T^2}{r_L^2} \qquad [3.1]$$



Johannes Kepler (1571-1630) astrónomo alemán formuló tres famosas leyes sobre el movimiento de los planetas en el sistema solar. Newton basándose en ellas formuló la ley de gravitación universal.

EJERCICIO RESUELTO

La aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra vale 9,8 m/s². Sabiendo que la distancia de la Luna al centro de la Tierra es 60 veces el radio terrestre, determina la aceleración de la gravedad debida a la Tierra, a la distancia a que se encuentra la Luna del centro de nuestro planeta.

$$\frac{g_L}{9{,}8\,m/s^2} = \frac{R_T^2}{(60\,R_T)^2}\ ; \qquad g_L = \frac{9{,}8\,m/s^2}{60^2} \approx 2{,}7.10^{-3}\ m/s^2$$

1.1 Leyes de Kepler

Hasta el Renacimiento, las teorías que explicaban el movimiento de los astros se basaron en procedimientos de observación poco precisos. En el siglo XVI el astrónomo Tycho Brahe, (1546-1601), realizó una serie de medidas de las posiciones de los cuerpos celestes, extraordinariamente precisas, y las dispuso en tablas de datos que fueron utilizadas mas tarde por su discípulo Johannes Kepler Con estos datos pudo establecer las ecuaciones matemáticas que describen el movimiento de los planetas, tomando el sistema de referencia en el Sol. Estas leyes son tres:

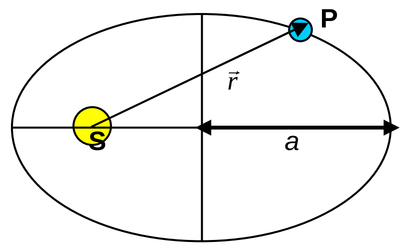


Fig.3.2 Los planetas describen órbitas elípticas alrededor del Sol

- **Primera ley :** *Los planetas describen órbitas elípticas alrededor del Sol, que se encuentra en uno de los focos,* fig.3.2.

- **Segunda ley :** Los radios vectores de las órbitas $\vec{r}$ que van del Sol al planeta barren áreas iguales en tiempos iguales. En la fig.3.3, el radio vector $\vec{r}_1$ cubre en el mismo tiempo, igual superficie que el radio $\vec{r}_2$ y como consecuencia la velocidad del planeta en su órbita es mayor cuando está más cerca del Sol, que cuando está más alejado, $|\vec{v}_1| > |\vec{v}_2|$.

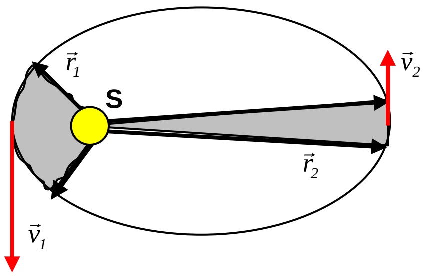


Fig.3.3 En igual tiempo, el radio vector cubre la misma área, con independencia de la distancia del planeta al Sol. En la figura, las dos áreas han sido barridas por el radio vector en tiempos iguales.

- **Tercera ley :** Establece la relación entre los semiejes mayores de las órbitas *"a "* fig.3.2 y los periodos *T* de los planetas. Su enunciado es el siguiente: *El cociente entre los cubos de los semiejes mayores de las órbitas de los planetas y los cuadrados de sus periodos, es el mismo para todos los planetas que giran alrededor del astro central.*

$$\frac{a^3}{T^2} = C = Constante$$

Estos cocientes con proporcionales a la masa del astro central.

$$C = k \cdot M \qquad [3.2]$$

1.2 Ley de Gravitación Universal

El Sol tiene un diámetro $d_S = 1{,}39.10^6\ km$. El planeta Júpiter que es el mayor del Sistema Solar, tiene un diámetro $d_J = 142{,}7.\ 10^3\ km$, siendo el semieje mayor de su órbita $a_J = 777{,}4.10^6\ km$. Comparando los diámetros del Sol y Júpiter, con el semieje a_J, es como tener una esfera de 1 m de diámetro a una distancia de 800 m de otra esfera de diámetro 0,1 m. Resulta razonable por lo tanto para estudiar el movimiento de los astros, considerarlos como partículas materiales moviéndose en el espacio.

El camino que se va a seguir para determinar a partir de las leyes de Kepler la Ley de Gravitación Universal, es suponer que las órbitas son circulares de radio $r = a$.

Sea un planeta de masa *m,* que con velocidad *v,* describe una circunferencia de radio *r* alrededor del Sol, el cual supondremos fijo y situado en el centro del circulo. Como el planeta cambia la dirección de su vector velocidad, sobre él tiene que actuar una fuerza centrípeta F_C que apuntará hacia el Sol en todos los puntos de la trayectoria, fig.3.4. Esta fuerza es proporcionada precisamente por la atracción solar.

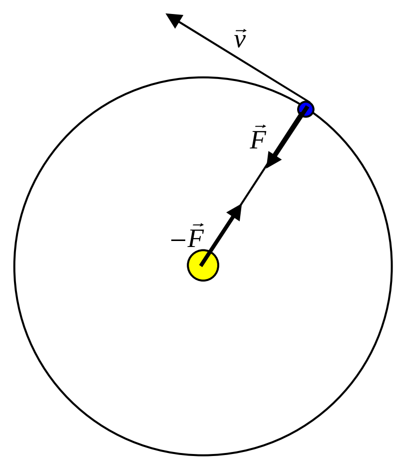


Fig.3.4 Sobre el planeta debido a la atracción gravitatoria, aparece una fuerza $\vec{F}$ siempre dirigida hacia el Sol y perpendicular a su vector velocidad $\vec{v}$, por lo que actúa como una fuerza centrípeta. Sobre el Sol actúa la pareja de reacción $-\vec{F}$ $-\vec{F}$, en la misma dirección, con el mismo módulo y de sentido contrario.

Si el periodo del planeta es *T* (tiempo que emplea en dar una vuelta alrededor del Sol), la velocidad del planeta se puede determinar como el cociente entre la longitud de la órbita recorrida en una vuelta y el tiempo empleado *T.*

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

Y el valor de la fuerza centrípeta:

$$F = m\frac{v^2}{r} = m\left(\frac{2\pi\ r}{T}\right)^2 \frac{1}{r} = 4\pi^2 m \frac{r}{T^2}$$

Para relacionarla con la tercera ley de Kepler [3.2] vamos a multiplicar y dividir por r^2; considerando a *r* como si fuera el semieje mayor de la órbita.

$$F = 4\pi^2\ m \frac{1}{r^2}\left(\frac{r^3}{T^2}\right) = \frac{4\pi^2\ m}{r^2}\cdot C = \frac{4\pi^2\ m}{r^2}\cdot k\ M_S = 4\pi^2\ k \frac{m\cdot M_S}{r^2} \qquad [3.4]$$

El primer factor que figura en [3.4] es un producto de constantes independiente de las masas de los cuerpos, se designa como *G,* constante de *Gravitación Universal.*

$$G = 4\ \pi^2 k \qquad [3.5]$$

El valor de G fue medido experimentalmente por primera vez, por Henry Cavendish (1731- 1810) en 1798 usando una balanza de torsión, dispositivo inventado por John Michell,(1724 - 1793) y que también utilizó Coulomb en 1784 para determinar la ley de las fuerzas eléctricas. Cavendish obtuvo el valor:

$$G = 6{,}67.10^{-11}\ \ N\ .\ m^2 / kg^2$$

Medidas muy recientes han confirmado el valor, con una aproximación que alcanza hasta la décimo sexta cifra decimal.

En Astronomía se suele tomar como unidad de distancia, la separación media de la Tierra al Sol, conocida como una unidad astronómica *(UA).*

$$1\ UA = 150.10^6\ km$$

Sustituyendo [3.5] en [3.4] se obtiene finalmente el módulo de esta fuerza:

$$F = G\frac{m\cdot M_S}{r^2} \qquad [3.6]$$

Se ha obtenido la ley de Gravitación Universal considerando el sistema formado por el Sol en reposo y un planeta girando a su alrededor, sin embargo, sabemos por la experiencia que esta ley determina la interacción gravitatoria entre dos masas cualesquiera del universo.

La ley de Gravitación Universal se enuncia: *La fuerza de gravitación universal entre dos masas es siempre atractiva, proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de su distancia. La constante de gravitación universal G, es independiente del medio material que separa las masas.*

De un modo general se puede escribir una expresión vectorial para la fuerza de gravitación universal entre dos masas *M* y *m*, utilizando un vector unitario $\vec{u}_r$ con origen en la masa *M*, fig.3.5.

$$\vec{F} = -G\,\frac{m\,M}{r^2}\,\vec{u}_r \qquad [3.7]$$

Fotografía de una balanza de torsión para la determinación de la constante de gravitación universal. La atracción gravitatoria entre las esferas grandes de plomo y las otras más pequeñas suspendidas de la barra horizontal, produce una torsión del hilo de acero, debido al par de fuerzas que aparece sobre estas últimas. Con un espejito situado en el hilo que es iluminado por un haz de luz, se determina el ángulo girado por el hilo y en función de este dato y de ciertas constantes del hilo, se calcula la constante de gravitación universal G.

Determinación de la constante de la tercera ley de Kepler

Despejando *k* de [3.5] y llevándola a [3.2], teniendo en cuenta que la masa central es la del Sol, M_S, se obtiene el valor de la constante *C* que figura en la tercera ley de Kepler.

$$C = k \cdot M_S = \frac{G\,M_S}{4\pi^2}$$

EJERCICIO RESUELTO

***Determina el valor de la constante C, para todos los planetas del Sistema Solar. La masa del Sol es de $1{,}98.10^{30}$ kg.*

$$C = \frac{G \cdot M_S}{4\pi^2} = \frac{6{,}67.10^{-11}\,N\cdot m^2\cdot kg^{-2}\cdot 1{,}98.10^{30}\,kg}{4\pi^2} = 3{,}35.10^{18}\,\frac{N\cdot m^2}{kg} = 3{,}35.10^{18}\,\frac{m^3}{s^2}$$

**Determina el valor de la constante C, para todos los satélites que giran alrededor de la Tierra, con independencia de que sean artificiales lanzados por el hombre o la propia Luna.*

$$C = \frac{G \cdot M_T}{4\pi^2} = \frac{6{,}67.10^{-11}\,N\cdot m^{''}\cdot kg^{-2}\cdot 5{,}98.10^{24}\,kg}{4\pi^2} = 1{,}01.10^{13}\,\frac{m^3}{s^2}$$

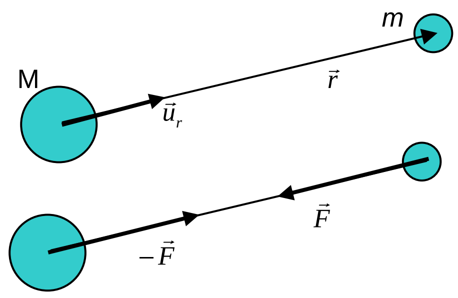


Fig.3.5 Vector unitario $\vec{u}_r$ y fuerza de interacción gravitatoria entre dos masas.

1.3 El peso en la superficie de la Tierra

La ley de gravitación universal explica porque cuando un cuerpo se deja libre en la Tierra, aparece sobre él una fuerza atractiva que lo lleva hacia la misma, generalmente lo designamos como peso del cuerpo. Sin embargo, vivimos en un planeta que está girando alrededor de su eje, y esta circunstancia tiene su influencia en la medida experimental que hacemos del peso de un cuerpo, considerando que está en reposo en la Tierra.

Para avanzar en estas cuestiones consideraremos como primera hipótesis, que la Tierra es perfectamente esférica y que no gira alrededor de su eje, constituyendo un sistema inercial. Después, valoraremos el efecto que produce la rotación alrededor de su eje, en la medida del peso.

- Considerando una Tierra esférica y sin rotación, constituiría un sistema inercial de referencia. Si su masa es M_T y su radio R_T, sobre un cuerpo de masa *m* situado en su superficie, es decir a la distancia R_T de su centro, la fuerza de atracción gravitatoria es:

$$F = G\frac{M_T\ m}{R_T^2}$$

  Este valor de la fuerza atractiva sobre la masa *m,* es el mismo en cualquier lugar de la superficie terrestre, ver fig.3.6

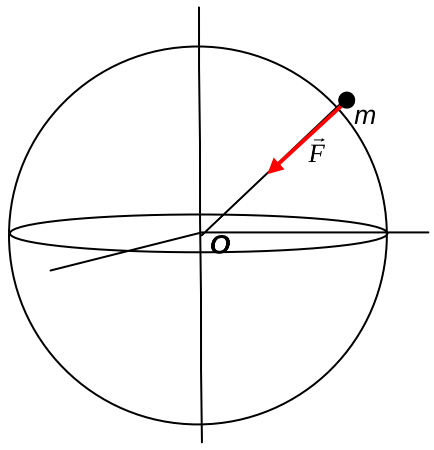


Fig.3.6. En una Tierra que no estuviese girando alrededor de su eje de rotación, los objetos libres solo estarían sometidos a la fuerza de gravitación $\vec{F}$, que es una fuerza radial hacia *O.*

- Si tenemos ahora en cuenta, que la Tierra gira alrededor de su eje dando una vuelta por día, tiene una velocidad angular ω_T y los ejes situados en el centro de la Tierra al giran con ella, constituyen un sistema no-inercial, de modo que sobre el cuerpo *m* que consideramos en reposo, actúan dos fuerzas, la fuerza de gravitación $\vec{F}$ y una fuerza centrífuga de inercia $\vec{F}_{CT}$; que depende de la latitud λ del lugar en que se encuentra el cuerpo, fig.3.7.

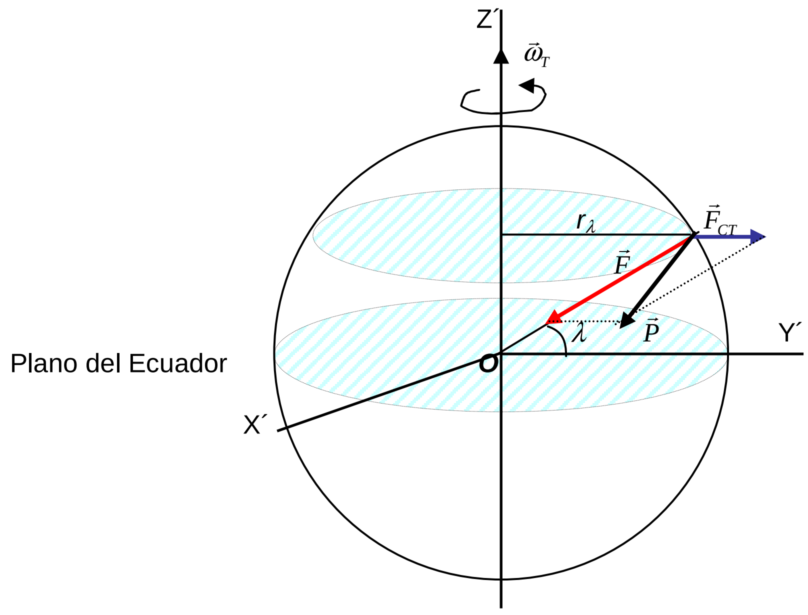


Fig.3.7. La Tierra gira alrededor de su eje de rotación y con ella los ejes situados con origen en el centro de la Tierra ***O***. Constituye un sistema no-inercial.

El peso $\vec{P}$ de un cuerpo que determinamos mediante una pesada (dinamómetro), es el vector suma o resultante, de las dos citadas fuerzas, de modo que la vertical de un lugar no coincide exactamente con la dirección del radio de la Tierra.

$$\vec{P} = \vec{F} + \vec{F}_{CT} \qquad [3.8]$$

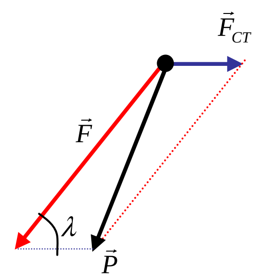


Fig.3.8. Fuerzas que actúan sobre un cuerpo en reposo situado en la Tierra girando. Por acción de la atracción gravitatoria aparece $\vec{F}$ y por la rotación de la Tierra actúa la fuerza centrífuga $\vec{F}_{CT}$. Su suma proporciona el valor del peso $\vec{P}$.

En la fig.3.8 se han dibujado y aumentado el tamaño de las dos fuerzas y se ha señalado el ángulo de la latitud λ. Para hallar el módulo del peso *P,* aplicaremos a los triángulos de la figura el teorema del coseno resultando:

$$P^2 = F^2 + F_{CT}^2 - 2\,F \cdot F_{CT} \cdot \cos\lambda \qquad [3.9]$$

El peso de un cuerpo depende de la latitud. Ahora estamos en disposición de calcular el peso de un cuerpo en distintos sitios de la Tierra. Cada emplazamiento se caracteriza por su latitud λ, que es ángulo que forma el radio de la Tierra R_T del lugar, con el Ecuador terrestre, fig.3.7 Como ejemplo vamos a considerar un cuerpo en tres lugares distintos, como el Ecuador terrestre, Mallorca y el Polo Norte.

- En el Ecuador la latitud es $\lambda = 0$ así que sustituyendo en [3.9]:

$$P^2 = F^2 + F_{CT}^2 - 2F \cdot F_{CT} \cdot \cos 0 = F^2 + F_{CT}^2 - 2F \cdot F_{CT} = \left(F - F_{CT}\right)^2$$

  Resultando para el peso: $P = F - F_{CT}$. En el Ecuador el peso es menor que la fuerza de atracción gravitatoria.

- En Mallorca cuya latitud es $\lambda = 39º\,33´$ el peso es:

$$P = \sqrt{F^2 + F_{CT}^2 - 2F \cdot F_{CT} \cdot \cos 39º\,33´}$$

- En el Polo Norte la latitud vale $\lambda = 90º$ y la fuerza centrífuga es nula porque al estar el cuerpo sobre el eje terrestre su distancia al mismo es cero y de [3.9] resulta que el peso es igual a la fuerza de la gravedad:

$$P = F = G\frac{M_T\, m}{R_T^2}$$

EJEMPLO RESUELTO

Considerando a la Tierra como una esfera, de radio medio $R_T = 6371.10^3$ m y masa $M_T = 5{,}98.10^{24}$ kg, que tiene una velocidad angular $\omega = 2\pi$ rad/día. Determina el peso de un cuerpo de masa 25 kg cuando se traslada desde el Ecuador, hasta Mallorca y después al Polo Norte. $G = 6{,}67.10^{-11}$ N·m^2 ·kg^{-2}.

a) El cuerpo está en el Ecuador de latitud $\lambda = 0$:

$$P = G\frac{M_T\, m}{R_T^2} - m\omega^2 R_T \cos 0 = 6{,}67.10^{-11}\,\frac{5{,}98.10^{24} \cdot 25}{(6371.10^3)^2} - 25\left(\frac{2\pi}{24 \cdot 3600}\right)^2 6371.10^3$$

$$P = 245{,}67 - 0{,}84 = 244{,}83\ N$$

b) El cuerpo está en Mallorca de latitud $\lambda = 39º\,33´ = 39{,}55º$

$$P = \sqrt{245{,}67^2 + \left(0{,}84 \cdot \cos 39{,}55º\right)^2 - 2 \cdot 245{,}67 \cdot 0{,}84 \cdot \cos^2 39{,}55º} = 245{,}17\ N$$

c) En el Polo Norte es la latitud $\lambda = 90º$ y la $F_{CT} = 0$

$$P = G\frac{M_T\, m}{R_T^2} = 245{,}67\ N$$

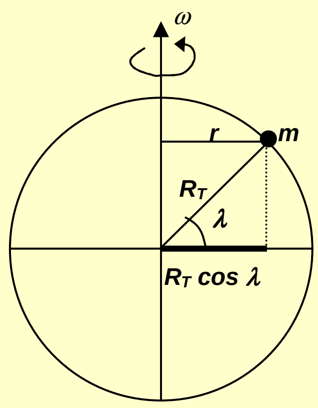
RESUMIENDO: Aunque la masa de un cuerpo es la misma en cualquier lugar de la Tierra, sin embargo, su peso varía con la latitud del lugar donde se encuentra y va aumentando al desplazarlo desde el Ecuador a los Polos. *También disminuye el peso de un cuerpo al subirlo por encima de la superficie terrestre, pues la distancia al centro de la Tierra es mayor que el valor del radio terrestre R_T ..*

SOBRE LA FUERZA CENTRÍFUGA

En el tema de Dinámica estudiamos que la fuerza centrífuga se calcula con la ecuación:

$$F_{CT} = m\,\omega^2\, r$$

Donde ω es la velocidad de rotación y r la distancia desde el lugar donde se encuentra la masa, hasta el eje de giro. Con ayuda de la figura vamos a expresar la distancia r, en función del radio terrestre R_T y de la latitud λ.



$$r = R_T\ \cos\lambda$$

Sustituyendo r resulta para la fuerza centrífuga la expresión:

$$\mathbf{F_{CT} = m\,\omega^2\, r = m\,\omega^2\, R_T\ \cos\lambda}$$

2 EL CAMPO GRAVITATORIO

Las masas de los cuerpos presentan una propiedad que se extiende por el espacio modificando sus características, y haciendo que sobre otras masas allí situadas aparezca una interacción (fuerza atractiva). El campo gravitatorio se propaga sin límites.

En adelante solo consideraremos masas puntuales o masas esféricas, pues entonces todo sucede como si toda la masa de la esfera estuviese concentrada en su centro.

2.1 Intensidad del campo gravitatorio

Para determinar el valor del campo gravitatorio creado por una masa *M* en un punto exterior, es decir la perturbación que ésta ha producido, se define un vector llamado ***intensidad del campo gravitatorio*** $\vec{g}$ **,** *como el valor de la fuerza que actúa sobre la masa unidad, situada en este punto del campo.*

Si en lugar de la unidad de masa se sitúa cualquier masa *m,* la intensidad del campo gravitatorio $\vec{g}$ es de acuerdo con la definición, el cociente entre la fuerza gravitatoria y la masa *m.*

$$\vec{g}=\frac{\vec{F}}{m}=\frac{-G\frac{M\,m}{r^2}u_r}{m}=-G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r \qquad [3.10]$$

Sus unidades son: $g \equiv \frac{N}{kg}$

Observa que son equivalentes a las de una aceleración. En efecto:

$$\frac{N}{kg}=\frac{kg\cdot m/s^2}{kg}=\frac{m}{s^2}$$

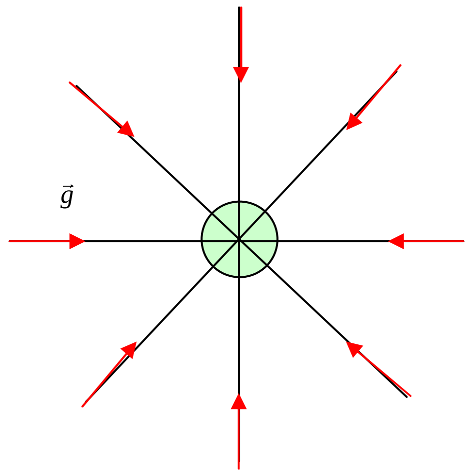


Fig.3.10. La líneas de fuerza del campo gravitatorio son tangentes en cada punto al vector campo gravitatorio $\vec{g}$ y entrantes hacia la masa creadora del campo.

La intensidad del campo gravitatorio, que en adelante llamaremos por brevedad “campo gravitatorio”, es una propiedad que en cada punto solo depende de la masa creadora del campo *M* y de la distancia *r* de la masa al punto. Como $\vec{g}$ es una magnitud vectorial fig.3.9, su dirección, es la de la recta que va de la masa al punto y su sentido entrante hacia la masa.

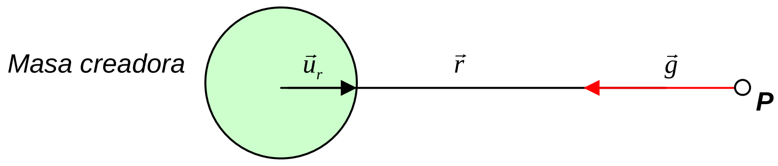


Fig.3.9. El campo gravitatorio $\vec{g}$ en un punto ***P,*** es un vector de dirección radial y entrante hacia la masa creadora del campo.

Líneas de fuerza del campo gravitatorio. Para visualizar el aspecto del campo gravitatorio, se representan las líneas de campo o de fuerza. Estas líneas se trazan de modo que sean tangentes en todos los puntos, al vector campo gravitatorio $\vec{g}$ **,** fig.3.10.

La fuerza gravitatoria sobre una masa testigo *m,* situada en el campo de otra *M,* donde la intensidad vale $\vec{g}$ **,** se deduce de [3.10]. Resulta $\vec{F}=m\cdot\vec{g}$.

2.1 Trabajo de la fuerza gravitatoria

Consideremos una masa *M* que crea un campo gravitatorio, si dentro del mismo situamos otra masa testigo *m,* se encontrará sometida a una fuerza gravitatoria cuya dirección es radial $\vec{F}(\vec{r})$, que hace trabajo sobre ella. Si el desplazamiento realizado es $d\vec{l}$ el trabajo elemental efectuado por la fuerza.

$$dW = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}$$

En la fig.3.11 el vector desplazamiento $d\vec{l}$ se ha descompuesto en la suma de dos vectores, uno en la dirección radial $dr\,\vec{u}_r$ y otro en la dirección perpendicular a la radial $d\vec{n}$.

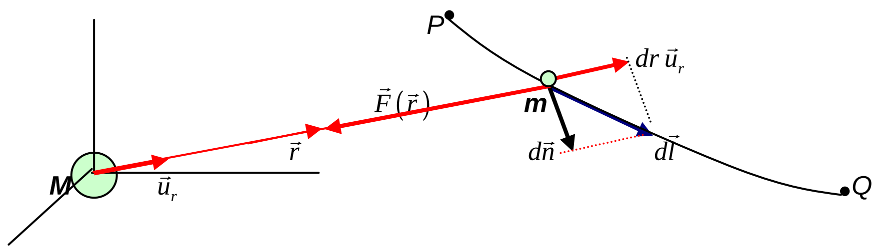


Fig.3.11. El desplazamiento $d\vec{l}$ se puede descomponer en dos componentes, una radial $dr\,\vec{u}_r$ y otra transversal $d\vec{n}$. Esta última no efectúa trabajo sobre *m* por ser perpendicular a la fuerza gravitatoria $\vec{F}(\vec{r})$.

La ecuación del trabajo elemental resulta:

$$dW = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \vec{F}(\vec{r}) \cdot (dr\,\vec{u}_r + d\vec{n}) = \vec{F}(\vec{r}) \cdot dr\,\vec{u}_r + \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{n} = \vec{F}(\vec{r}) \cdot dr\,\vec{u}_r$$

En consecuencia, solamente efectúa trabajo la fuerza gravitatoria $\vec{F}(\vec{r})$, cuando el desplazamiento $d\vec{l}$ de la masa *m,* tiene alguna componente en la dirección radial.

El trabajo realizado por la fuerza del campo, entre dos puntos *P* y *Q* se determina sumando todos los trabajos elementales y matemáticamente se calcula mediante una integral definida desde *P* hasta *Q*.

$$W_{P \to Q} = \int_P^Q \vec{F}(\vec{r}) \cdot dr\,\vec{u}_r = \int_P^Q -G\frac{M\,m}{r^2}\vec{u}_r \cdot dr\,\vec{u}_r = G\,Mm\int_P^Q \frac{-dr}{r^2} = G\,Mm\left(\frac{1}{r}\right)_P^Q$$

$$W_{P \to Q} = G\,Mm\left(\frac{1}{r_Q} - \frac{1}{r_P}\right) \qquad [3.11]$$

Observa, que en la ecuación [3.11] del trabajo realizado por la fuerza aparecen solamente las posiciones final e inicial, representadas por los módulos de los vectores de posición de los puntos *P* y *Q,* fig.3.12. *En consecuencia el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria entre dos puntos, no depende del camino seguido entre ellos, solamente de la posición inicial y final. Se dice que es una fuerza conservativa.*

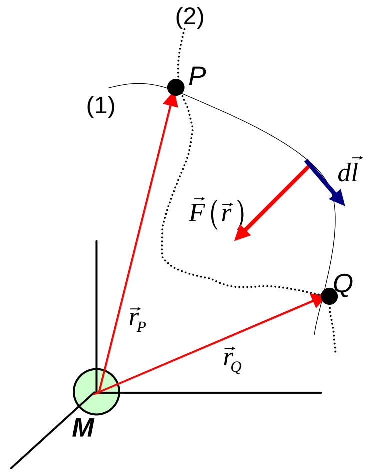


Fig.3.12. El trabajo de la fuerza gravitatoria entre dos puntos *P* y *Q*, es el mismo por cualquiera de los caminos que llevan de *P* a *Q.* En la figura el trabajo por el camino (1) en línea continua, vale igual que el trabajo por el camino (2) en línea discontinua.

Si el trabajo realizado por la fuerza del campo se efectúa a lo largo de una curva cerrada, entonces la masa *m* sale de un punto *P* y regresa al mismo punto *P*. Aplicando la ecuación [3.11] queda:

$$W_{P \to P} = G\,Mm\left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_P}\right) = 0$$

El trabajo realizado por la fuerza del campo gravitatorio que es conservativa, a lo largo de una línea cerrada es nulo.

2.2 Potencial gravitatorio

Cuando una masa *M,* se encuentra en el espacio modifica sus propiedades y otro modo de asignar un valor a la perturbación en cada punto, es mediante una magnitud escalar llamada potencial.

Sea un punto *P,* definido por un vector de posición $\vec{r}$ respecto de la masa *M* creadora del campo. *Se define el potencial gravitatorio en un punto, como el valor del trabajo que efectúa la fuerza del campo para trasladar a la unidad de masa, desde el citado punto hasta el infinito, al que se le asigna un valor nulo al potencial.*

En realidad, si en lugar de la unidad de masa se traslada otra masa *m* cualquiera, desde el punto al infinito, el potencial gravitatorio se puede determinar de acuerdo con la definición anterior, como la razón:

$$V_G(r)=\frac{W_{r\rightarrow\infty}(sobre\ la\ masa)}{m}$$

Sus unidades en el Sistema Internacional son: J/kg

Para calcular el trabajo que hace la fuerza del campo gravitatorio entre dos puntos, podemos aplicar la ecuación [3.11] considerando que el segundo punto está en el infinito.

$$V_G(r)=\frac{W_{P\rightarrow\infty}}{m}=\frac{G\,Mm\left(\frac{1}{\infty}-\frac{1}{r_P}\right)}{m}=-G\frac{M}{r}$$

Observa que el potencial gravitatorio es una propiedad que solo depende de la masa *M* creadora del campo y de la distancia *r* del punto a la masa creadora. Además, varía con el inverso de la distancia al punto, tomando su valor máximo en el infinito y haciéndose cada vez más negativo (menor), a medida que disminuye la distancia *r* a la masa creadora del campo.

La diferencia de potencial entre dos puntos del campo gravitatorio *P* y *Q*, es igual al trabajo que efectúa la fuerza del campo, para llevar a la unidad de masa desde el primer punto al segundo. Para calcularla, basta con restar los potenciales de los dos puntos, aplicando la ecuación anterior.

$$V_{G,Q}-V_{G,P}=-G\frac{M}{r_Q}-\left(-G\frac{M}{r_P}\right)=-GM\left(\frac{1}{r_Q}-\frac{1}{r_P}\right)$$

Ejercicio Resuelto

a) Determina el potencial gravitatorio que crea la Tierra en los puntos de la órbita lunar, situados a una distancia media del centro de nuestro planeta de 380.000 km. b) Diferencia de potencial entre el punto anterior y otro de la superficie terrestre situado a 6371 km del centro de la Tierra.

a) El potencial: $V_{G,P}=-6{,}67.10^{-11}\frac{N}{m^2\,kg^2}\frac{5{,}98.10^{24}\,kg}{380\,000.10^3\,m}=-1{,}05.10^6\frac{J}{kg}$

b) La diferencia de potencial:

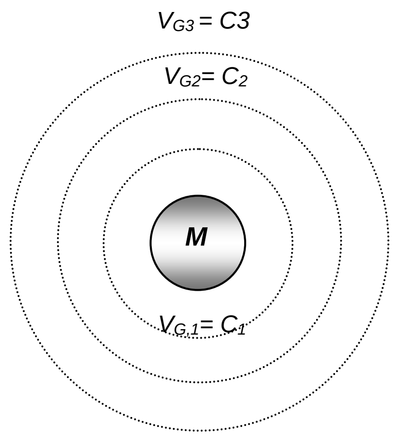
$$V_{G,Q}-V_{G,P}=-6{,}67.10^{-11}\frac{N}{m^2\,kg^2}5{,}98.10^{24}\,kg\left(\frac{1}{380\,000.10^3\,m}-\frac{1}{6371.10^3\,m}\right)=61{,}6.10^6\frac{J}{kg}$$

Superficies equipotenciales

El lugar geométrico de aquellos puntos del campo gravitatorio, en los que el potencial gravitatorio tiene el mismo valor, constituye una superficie equipotencial. Expresaremos está propiedad diciendo que todos los puntos de la superficie verifican.

$$V_G(x,y,x) = Cte$$

Considerando que la masa tiene forma esférica y se encuentra aislada, entonces las superficies equipotenciales son superficies esféricas con centro en la masa.



En la figura se han representado tres superficies equipotenciales, en cada una de las cuales el potencial vale lo mismo, pero es distinto del valor que toma en las demás.

Ecuación más general del potencial gravitatorio

Sustituyendo la ecuación del trabajo de la fuerza gravitatoria y de (3.10).

$$V_G=\frac{\int\vec{F}_G\cdot d\vec{l}}{m}=\int\vec{g}\cdot(d\vec{r}+d\vec{n})$$

$$V_G=\int\vec{g}\cdot d\vec{r}+\int\vec{g}\cdot d\vec{n}=\int\vec{g}\cdot d\vec{r}$$

Porque el producto escalar del segundo sumando es nulo.
Tomando diferenciales de la ecuación anterior, resulta en forma diferencial la relación siguiente:

$$dV_G=\vec{g}\cdot d\vec{r}$$

2.3. Relación entre el campo gravitatorio y el potencial

El campo gravitatorio es un vector y para determinarlo es necesario conocer su módulo, dirección y sentido. El potencial gravitatorio V_G es una función escalar por lo que queda identificado mediante un valor numérico, sin embargo, estas dos magnitudes del campo gravitatorio están relacionadas entre sí, mediante un operador llamado *"gradiente".*

Consideremos el campo gravitatorio creado por una masa *M* y en él dos superficies equipotenciales muy próximas, de radios r y $r+dr$; que están respectivamente a potenciales gravitatorios V_G ,y $V_G + dV_G$ véase fig. 3.?. *Se define el gradiente del potencial,* $\overrightarrow{grad}\, V_G$, *como un vector perpendicular a las superficies equipotenciales, cuyo sentido es hacia los valores crecientes del potencial.*

Físicamente, el gradiente del potencial en un punto, proporciona la máxima variación que experimenta el potencial gravitatorio por unidad de longitud recorrida. Si la diferencia de potencial entre las dos superficies es: $(V_G + dV_G) - V_G = dV_G$; y dr su distancia, el módulo del gradiente es el cociente dV_G/dr. Si $\vec{u}_r$ es un vector unitario en la dirección radial, el vector gradiente del potencial gravitatorio se puede expresar:

$$\overrightarrow{grad}\, V_G = \frac{dV_G}{dr}\vec{u}_r \qquad [3. ¿?]$$

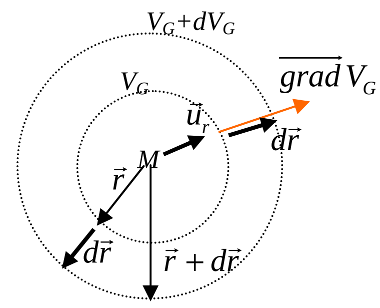


Fig.3.? El gradiente del potencial va en el sentido de los potenciales crecientes.

Donde el signo del gradiente viene determinado por la derivada dV_G/dr .

Por otra parte, el campo gravitatorio $\vec{g}$ producido por una masa es radial y entrante, fig.3.??, de modo tiene sentido contrario al vector gradiente. De la definición de diferencia de potencial se deduce que

$dV_G = \vec{g}\cdot d\vec{r} = g\, dr \cos 180 = -g\, dr$ y de aquí $g = -\dfrac{dV_G}{dr}$ -

Multiplicando los dos miembros por el unitario $\vec{u}_r$ resulta: $g\,\vec{u}_r = -\dfrac{dV_G}{dr}\vec{u}_r$

Observando la ecuación del gradiente, se acostumbra a escribir:

$$\vec{g} = -\overrightarrow{grad}\, V_G$$

El campo gravitatorio es igual al gradiente del potencial gravitatorio cambiado de signo. El signo menos indica que el campo gravitatorio va en el sentido de los potenciales decrecientes, es decir, en sentido contrario al del gradiente del potencial gravitatorio.·

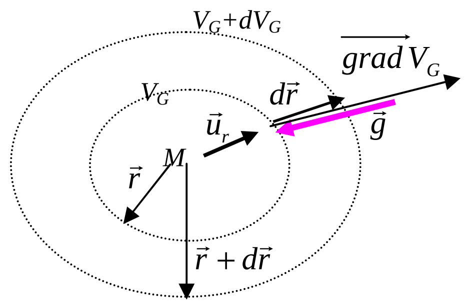


Fig.3.??. El campo gravitatorio va en el sentido de los potenciales decrecientes, es decir, en sentido opuesto al gradiente del potencial.

Ejercicio resuelto

Sabiendo que el potencial gravitatorio es: $V_G = -G\dfrac{M}{r}$ determina el vector campo gravitatorio.

$$\vec{g} = -\overrightarrow{grad}\, V_G = -\frac{dV_G}{dr}\vec{u}_r = -\frac{d}{dr}\left(-G\frac{M}{r}\right)\vec{u}_r = GM\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{u}_r = -\frac{GM}{r^2}\vec{u}_r$$

2.4 Energía potencial gravitatoria

Cuando una masa *m,* se encuentra en el campo gravitatoria de otra masa *M,* posee una energía que depende de la posición que ocupa en el campo. Se designa como energía potencial gravitatoria y se define como el trabajo realizado por la fuerza del campo para trasladar a la masa *m* desde el lugar que ocupa hasta el infinito, donde se le asigna una energía potencial cero.

$$U = W_{r\rightarrow\infty} = \int_r^\infty \vec{F}_G \cdot d\vec{r} = \int_r^\infty -G\frac{M\,m}{r^2}\vec{u}_r \cdot d\vec{r} = G\,M\,m\int_r^\infty -\frac{dr}{r^2} = G\,M\,m\left(\frac{1}{r}\right)_r^\infty$$

$$U = G\,M\,m\left(\frac{1}{\infty}-\frac{1}{r}\right) = -\frac{G\,M\,m}{r} \qquad [3.12]$$

La energía potencial gravitatoria de *m,* es nula en el infinito y decrece (es más negativa) al disminuir su distancia *r* a la masa creadora del campo *M.* La representación gráfica de la energía potencial de *m,* en función de la distancia *r* a la masa creadora *M,* es una hipérbola equilátera, fig.3.13.

Variación de la energía potencial. En la práctica los cuerpos se van a mover entre dos puntos del campo gravitatorio y lo que vamos a considerar es la variación de la energía potencial que experimentan.

Consideremos una masa *m*, que se mueve desde un punto *P* hasta otro *Q,* en el campo gravitatorio de una masa *M.* La variación de la energía potencial gravitatoria se acostumbra a escribir señalando la diferencia entre la energía potencial que tiene en el último punto *Q,* menos la que tenía en el primero *P.* De acuerdo con la ecuación [3.12] resulta:

$$\Delta U = U_Q - U_P = -\frac{G\,M\,m}{r_Q} - \left(-\frac{G\,M\,m}{r_P}\right) = -\left(\frac{G\,M\,m}{r_Q} - \frac{G\,M\,m}{r_P}\right) = -G\,M\,m\left(\frac{1}{r_Q}-\frac{1}{r_P}\right)$$

Si se compara esta última ecuación, con la [3.11], que determina el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria para trasladar a la masa *m,* desde un punto $P \rightarrow Q$, se verifica que $\Delta U = -W_{P\rightarrow Q}$. Esta importante ecuación se escribe:

$$W_{P\rightarrow Q} = -\,\Delta U \qquad [3.13]$$

El trabajo realizado por la fuerza gravitatoria sobre una masa m, es igual a menos el incremento de su energía potencial.

Si una masa *m* se deja libre en un campo gravitatorio, se pondrá en movimiento de forma espontánea en el sentido de disminuir su energía potencial, es decir, tratando de acercarse a la masa creadora del campo.

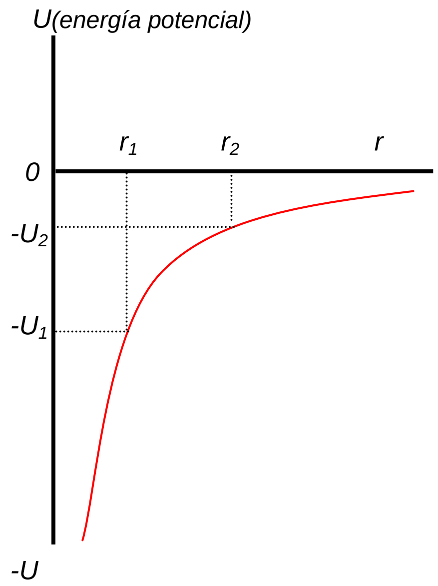


Fig.3.13. Representación de la energía potencial gravitatoria *U,* de una masa *m* en función de su distancia *r* a la masa creadora del campo *M* que está situada en *O.* Puedes observar que cuando *r* aumenta, $r_1 < r_2$ también lo hace la energía potencial *U,* que resulta menos negativa.

La energía potencial gravitatoria de *m* es siempre negativa, tomando su valor máximo que es cero, cuando se encuentra en el infinito $r = \infty$. Observa en la figura, como los ejes *r* y *-U,* son asíntotas de la hipérbola equilátera.

EJERCICIO RESUELTO

La masa de la Luna es 7,34.10^{22} kg y su distancia media a la Tierra de 384.10^{6} m. La masa de la Tierra es 5,98.10^{24} kg y la constante de gravitación universal G = 6,67,10^{-11} N·m^{2} ·kg^{-2} . Determina con estos datos la energía potencial gravitatoria de la Luna en el campo de la gravedad terrestre.

$$U = -\frac{G\,M\,m}{r} = -\frac{6{,}67.10^{-11}\cdot 5{,}98.10^{24}\cdot 7{,}34.10^{22}}{384.10^{6}} = -\,7{,}62.10^{28}\ J$$

EJERCICIO RESUELTO

Un satélite artificial de masa 1000 kg, gira en una órbita ecuatorial geoestacionaria a una distancia del centro de la Tierra de 42 250 km. Si llegase a caer sobre el mar, determina su variación de energía potencial. El radio de la Tierra es de 6 371 km.

$$\Delta U = -G\,M\,m\left(\frac{1}{R_T}-\frac{1}{r_{orbita}}\right) = -6{,}67.10^{-11}\cdot 5{,}98.10^{24}\cdot 1000\left(\frac{1}{6371.10^3}-\frac{1}{42250.10^3}\right)$$

$$\Delta U = -5{,}31.10^{10}\ J$$

EJERCICIO RESUELTO

Determina el trabajo realizado por la fuerza del campo gravitatorio sobre el satélite, en su aproximación a la superficie de la Tierra.

$$W_{P\to Q} = -\Delta U = -(-5{,}31.10^{10}\ J) = 5{,}31.10^{10}\ J$$

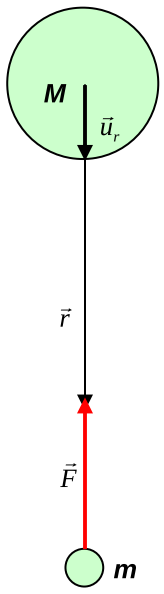


Fig.3.14 La fuerza gravitatoria sobre una masa ***m,*** tiene dirección radial y únicamente varía con el inverso del cuadrado de la distancia. Así mismo, la energía potencial de ***m*** solo depende del inverso de la distancia a la masa ***M.***

2.5 Relación entre la fuerza gravitatoria y la energía potencial

La fuerza gravitatoria es una fuerza conservativa y por este motivo en el campo gravitatorio de una masa *M,* se puede definir la energía potencial de cualquier otra masa testigo *m.*

La fuerza del campo gravitatorio sobre la masa testigo *m* está dirigida radialmente hacia la masa creadora del campo *M*, fig.3.14 y varía con el inverso de r^2. También, la energía potencial de *m* cambia únicamente en la dirección radial, dependiendo en este caso del inverso de *r*, ec [3.12].

Si calculamos la derivada de la energía potencial respecto de *r;* se obtiene la variación de la energía potencial por unidad de longitud recorrida en la dirección radial, resultando:

$$\frac{dU}{dr}=\frac{d}{dr}\left(-\frac{GMm}{r}\right)=GMm\frac{d}{dr}\left(\frac{-1}{r}\right)=G\frac{M\,m}{r^2}$$

El valor obtenido es el módulo de la fuerza gravitatoria F_G .

Reemplazando este valor en la ecuación vectorial de la fuerza gravitatoria ec. [3.7] resulta:

$$\vec{F}=-G\frac{M\,m}{r^2}\vec{u}_r=-\frac{dU}{dr}\vec{u}_r \qquad [3.14]$$

La fuerza gravitatoria es la derivada cambiada de signo, de la energía potencial respecto de la distancia, medida en la dirección radial. Esta propiedad es exclusiva de las fuerzas conservativas.

En el gráfico de la fig.3.15, la pendiente de la recta tangente trazada en un punto de la curva de la energía potencial en función de *r*, es justamente $\frac{dU}{dr}$, es decir, el módulo de la fuerza del campo gravitatorio en el punto correspondiente.

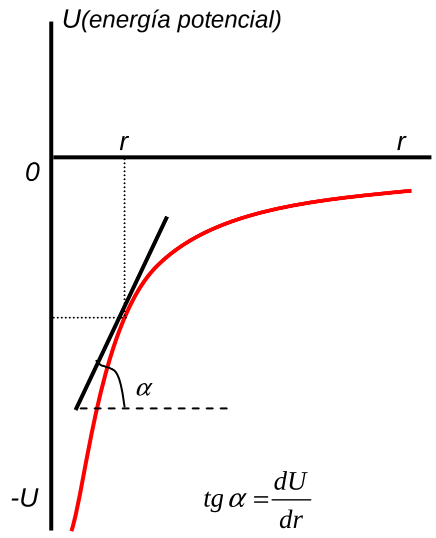


Fig.3.15. La pendiente de la tangente a la curva en un punto *r*, vale $\frac{dU}{dr}$.

2.7 Energía mecánica de un cuerpo en un campo gravitatorio

Pequeños desplazamientos en la superficie terrestre

Calcular la variación de energía potencial de una masa m, que se desplaza verticalmente una distancia h pequeña, entre dos puntos P y Q, situados en la superficie de la Tierra.

Consideremos que el punto *P*, se encuentra respecto del centro del planeta justo en la superficie a una distancia R_T; mientras que el punto *Q* está por encima a una distancia $R_T + h$, fig.3.16. La variación de energía potencial:

$$\Delta U = U_Q - U_P = -\frac{GMm}{R_T + h} - \left(-\frac{GMm}{R_T}\right) = GMm\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h}\right)$$

$$\Delta U = GMm\left(\frac{R_T + h - R_T}{R_T^2 + R_T \cdot h}\right) = GMm\left(\frac{h}{R_T^2 + R_T \cdot h}\right)$$

Ahora bien, si *h* es una distancia pequeña frente al radio terrestre por ejemplo *100 m*, comparando con el radio de la Tierra, $R_T = 6\ 371\ 000\ m$. Entonces es $h \ll R_T$ y $R_T \cdot h \ll R_T^2$ por lo que resulta despreciable. Considerando estos argumentos resulta:

$$\Delta U = GMm\frac{h}{R_T^2} = G\frac{M}{R_T^2}m\,h$$

Donde $G\dfrac{M}{R_T^2} = |\vec{g}| = g$; es el módulo de la intensidad del campo gravitatorio, ec.[3.10]. Resulta finalmente para la variación de la energía potencial:

$$\Delta U = m\,g\,h$$

La aplicación de esta ecuación queda limitada a pequeños desplazamientos verticales, frente al valor del radio de la Tierra. Resulta de gran utilidad en la Mecánica, como hemos visto en unidades anteriores.

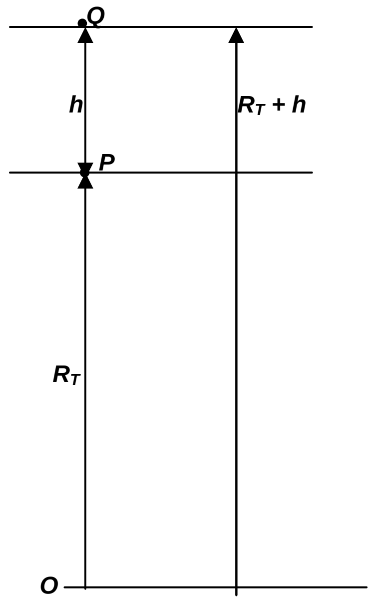


Fig.3.16. Al desplazar un cuerpo una distancia *h,* pequeña frente al valor del radio de la Tierra, la variación de la energía potencial es puede expresar como: $\Delta U = m\,g\,h$

Por simple observación del cielo comprobamos que los planetas modifican su posición respecto de las estrellas, lo que nos induce a pensar que éstos están en movimiento y que tienen energía cinética. Además, como se mueven en el campo gravitatorio del Sol y de los demás cuerpos del universo, tienen energía potencial gravitatoria. En consecuencia, cualquier cuerpo que está en el espacio tiene también energía mecánica, que es la suma de la energía cinética respecto de un sistema de referencia, más la potencial gravitatoria.

Ya hemos estudiado en lecciones anteriores el principio de conservación de la energía mecánica, que afirma: cuando un cuerpo se mueve bajo la acción de fuerzas conservativas, su energía mecánica permanece constante, ecuación [1.29]. Ahora puede escribirse para el movimiento planetario del modo siguiente:

$$U + E_c = -\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2}mv^2 = Cte \qquad [3.15]$$

Como aplicación se van a analizar varios casos posibles:

- Satélite que gira en una órbita elíptica alrededor de la Tierra. Cuando éste se aleja, fig.3.17, la energía potencial gravitatoria ec.[3.12] aumenta con la distancia *r* al planeta, de modo que al ser la energía mecánica constante, deberá disminuir la energía cinética y por tanto su velocidad, cuanto más se aleja de la Tierra más lento se mueve.

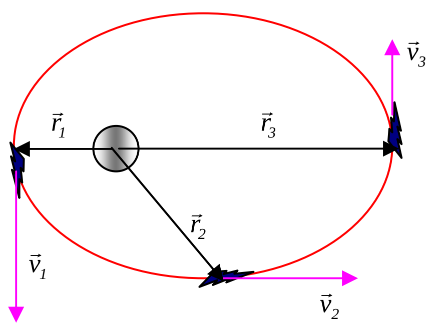


Fig.3.17 A medida que aumenta la distancia *r* del satélite menor es su velocidad

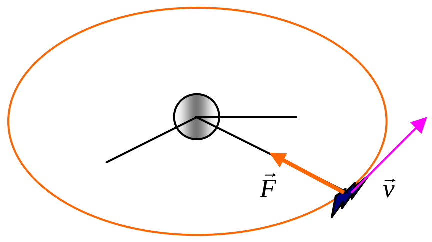


Fig.3.18. Si la órbita es una circunferencia, la fuerza gravitatoria siempre apunta hacia el centro de la Tierra y actúa como una fuerza centrípeta.

- **E_m<0.** Consideremos el caso particular de que la órbita del satélite sea una circunferencia de radio r, fig.3.18, y vamos a calcular sus energías, cinética y potencial gravitatoria. Haremos la aproximación de suponer unos ejes fijos en el centro de la Tierra que no giran y de este modo solo es necesario considerar sobre el satélite la fuerza gravitatoria *F*.
  Como la fuerza gravitatoria actúa de fuerza centrípeta, podemos expresarla como $F = F_C$. Igualando los módulos es posible despejar la velocidad v del satélite, en su órbita alrededor de la Tierra .

$$G\frac{M_T\,m}{r^2} = m\frac{v^2}{r}\,; \qquad v = \sqrt{\frac{G\,M_T}{r}}$$

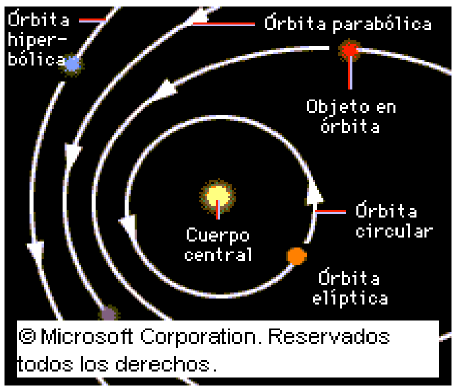
La energía cinética: $E_C = \frac{1}{2}m\,v^2 = \frac{1}{2}m\frac{G\,M_T}{r} = \frac{1}{2}G\frac{M_T\,m}{r}$

La energía potencial gravitatoria: $U = -G\frac{M_T\,m}{r}$

La energía mecánica: $U + E_C = -G\frac{M_T\,m}{r} + \frac{1}{2}G\frac{M_T\,m}{r} = -\frac{1}{2}G\frac{M_T\,m}{r}$

El satélite que está "atrapado" y girando en el campo gravitatorio terrestre tiene una energía total (mecánica), menor que cero. *Esta es la condición que debe satisfacer cualquier cuerpo celeste para girar en una órbita cerrada sea elíptica o circular, alrededor de otro astro.*

- Si consideramos ahora un cuerpo libre, no estará sometido a la acción de ningún otro cuerpo y su energía potencial gravitatoria será cero. Como además puede tener velocidad, poseerá energía cinética que siempre es positiva, resultando su energía mecánica mayor que cero.
- Si un astro se encuentra en un momento determinado en el campo gravitatorio de otro, siendo su energía cinética mayor que el valor absoluto de su energía potencial, entonces puede más la primera que la segunda y se escapa de la atracción gravitatoria. *Si la energía mecánica es positiva la órbita es abierta (parábola* ***E_m=0*** *o hipérbola* ***E_m>0****).* Sucede con algunos cometas que entran en el sistema solar, teniendo una fase de aproximación al Sol y luego alejándose de él indefinidamente, o con los sondas espaciales que desde la Tierra enviamos a otros planetas.



Las órbitas de los planetas son cerradas, pero los demás cuerpos celestes pueden tener órbitas cerradas o abiertas, alrededor de un astro central, como los cometas o las sondas espaciales.

EJERCICIO RESUELTO

Determina la velocidad de escape necesaria para que una sonda espacial salga de la Tierra. Datos: M_T = 5,98.10^{24} kg ; R_T = 6 371 km ; G = 6,67.10^{-11} N · m^2 · kg^{-2}

Se conoce como velocidad de escape la velocidad mínima con que se debe lanzar un satélite desde una cierta posición en la Tierra, para que salga de su campo gravitatorio. Consideramos que el lanzamiento se hace desde el suelo, es decir a una distancia del centro de la Tierra igual a su radio R_T .

Las condiciones necesarias para proporcionar a la sonda la menor energía posible, son aquellas que la permiten llegar al infinito y además alcanzarlo con velocidad nula. Entonces se cumple que por estar en el infinito la energía potencial es cero *U = 0* y por llegar parada también la energía cinética $E_C = 0$, y consecuentemente la energía mecánica: $U + E_C = 0$.

Como la energía mecánica de la sonda se conserva, también debe valer cero antes del lanzamiento en la superficie terrestre. Así que llamando v a la velocidad de lanzamiento se verifica:

$$-G\frac{M_t\, m}{R_T}+\frac{1}{2}m v^2=0\,; \qquad \Rightarrow \qquad v=\sqrt{\frac{2G\,M_T}{R_T}}$$

Sustituyendo los datos: $v=\sqrt{\dfrac{2\cdot 6{,}67.10^{-11}\cdot 5{,}98.10^{24}}{6371.10^3}}=11190\,m/s=11{,}2\,km/s$

La velocidad de escape lanzando la sonda desde la superficie de la Tierra es de *11,2 km/s* .

3 Campo gravitatorio dentro de una esfera

Hasta ahora hemos determinado la perturbación que produce una masa esférica en los puntos del espacio exteriores a ella, mediante el vector intensidad del campo gravitatorio $\vec{g}$, sin embargo todavía no nos hemos planteado cuanto vale el campo gravitatorio en puntos interiores a la propia esfera. Para responder con sencillez a esta cuestión hemos de estudiar previamente la ley de Gauss.

3.1 Ley de Gauss para el campo gravitatorio

Consideremos una masa puntual *M.* El módulo del campo gravitatorio en puntos situados a la misma distancia *r*, debe tener el mismo valor, debido a la simetría del espacio alrededor de la masa puntual, fig.3.19. Es decir, en aquellos puntos situados sobre la superficie de una esfera de radio *r,* con centro en *M.*

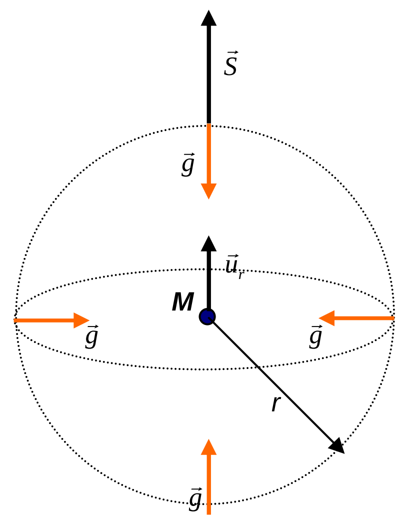


Fig.3.19. Todos los puntos situados sobre la esfera de radio *r,* se encuentran a la misma distancia de *M* , con lo que el campo gravitatorio en todos ellos, toma igual valor en módulo.

La superficie de la esfera de radio *r* cuya área vale $4\pi r^2$ vamos a convenir representarla por un vector $\vec{S}$ perpendicular ella, con sentido positivo hacia fuera, fig.3.19, y cuyo módulo es igual al valor del área.

Si ahora multiplicamos escalarmente los vectores campo gravitatorio $\vec{g}$ y el vector superficie $\vec{S}$, se obtiene una nueva magnitud *conocida como flujo del campo gravitatorio* Φ a través de la superficie de la esfera.

$$\Phi=\vec{g}\cdot\vec{S}=-G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r\cdot 4\pi r^2\,\vec{u}_r=-4\pi G\,M \qquad [3.16]$$

La ecuación es conocida como la Ley de Gauss para el campo gravitatorio, donde M es solamente la masa contenida dentro de la esfera Observa que el resultado es independiente del radio de la esfera y si en lugar de hallar el flujo a través de esta esfera se hubiera calculado a través de otra cualquiera de radio mayor o menor, el valor obtenido sería el mismo.

El resultado obtenido para el flujo es de aplicación para cualquier masa sea o no puntual, que este situada dentro de la esfera. La ventaja de la Ley de Gauss es que permite determinar el valor del vector intensidad del campo con mucha facilidad, en aquellos casos en los que la masa creadora del campo presenta mucha simetría como es el caso de las masas esféricas.

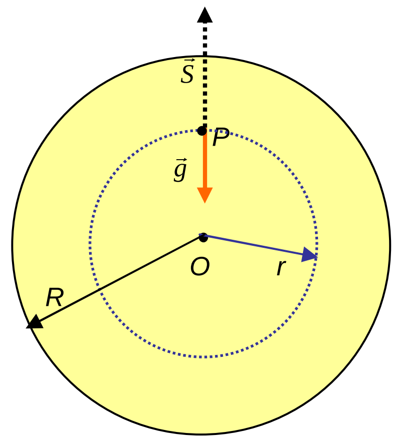


Fig.3.20. Para determinar el campo gravitatorio en un punto *P* del interior de una esfera homogénea, se traza una superficie esférica de radio *r,* (de puntos en la figura), concéntrica con la anterior y que pase por el punto *P.* Luego se aplica la ley de Gauss.

3.1 Campo gravitatorio de una esfera homogénea

Consideremos una esfera homogénea de densidad ρ, masa *M* y radio *R.* Vamos a determinar el campo gravitatorio en un punto interior *P,* situado a distancia *r* del centro, tal que $r < R$ y después en el exterior para $r \geq R$.

Tomaremos una superficie esférica concéntrica con la esfera homogénea que pasa por el punto *P*, fig.3.20, y le aplicaremos la ley de Gauss, teniendo en cuanta que la masa *m* que debemos considerar, es únicamente la que está dentro de la esfera de radio *r,* cuyo valor será:

$$m = densidad \ x \ V(\ esfera \ \ de \ radio \ r\ ) = \frac{masa \ \ total}{volumen \ total} \ x \ \ V(\ esfera \ \ de \ radio \ r\ )$$

$$m = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \ x \frac{4}{3}\pi r^3 = M \frac{r^3}{R^3}$$

Aplicando la ley de Gauss resulta:

$$\Phi = \vec{g} \cdot \vec{S} = |\vec{g}| \ |\vec{S}| \cos 180 = -4\pi G m$$

$$|\vec{g}| = \frac{4\pi G m}{|\vec{S}|} = \frac{4\pi G M \ r^3/R^3}{4\pi r^2} = G\frac{M}{R^3} r \qquad [3.17]$$

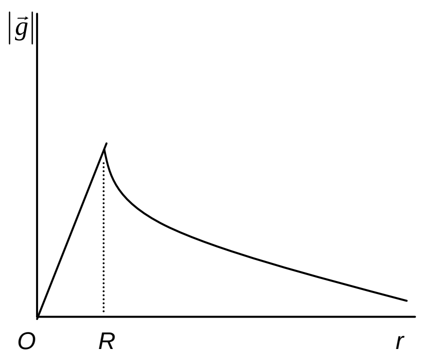


Fig.3.21. Variación de la intensidad del campo gravitatorio, con la distancia al centro de una esfera homogénea. Observa que $|\vec{g}|$ toma su valor máximo en la superficie de la propia esfera de radio *R.*

Las magnitudes *G, M y R* son constantes para una determinada masa esférica, sin embargo *r* varía a medida que cambia la distancia del punto al centro de la esfera. *En definitiva, el campo gravitatorio en puntos interiores de una esfera homogénea varía linealmente con la distancia la centro*.

En puntos situados desde la superficie $r = R$, hasta el infinito, para calcular el flujo se toma una superficie de radio $r \geq R$; que contiene por tanto la masa total *M.* El flujo a través de esta esfera exterior vale:

$$\Phi = \vec{g} \cdot \vec{S} = |\vec{g}| \ |\vec{S}| \cos 180 = -4\pi G M \ ; \qquad |\vec{g}| = \frac{4\pi G M}{4\pi r^2} = G\frac{M}{r^2} \qquad Para \ r \geq R$$

El resultado es el mismo que si toda la masa de la esfera *M,* estuviese concentrada en su centro, como una masa puntual.

Si se representa el campo gravitatorio de una esfera homogénea de radio *R,* en función de la distancia a su centro *O* , se obtiene una recta para puntos situados entre $0 < r \leq R$ y una curva para valores de $r \geq R$, véase la fig.3.21

EJEMPLO RESUELTO

Determina la intensidad del campo gravitatorio terrestre en el interior de nuestro planeta, en función de la distancia a su centro.

Considerando a la Tierra como una esfera homogénea podemos aplicar la ecuación [3.17] y resulta:

$$|\vec{g}| = G\frac{M_T}{R_T^3}r = 6{,}67.10^{-11}\frac{N\,m^2}{kg^2}\frac{5{,}98.10^{24}\,kg}{\left(6\,371.10^3\right)^3 m^3}r = 1{,}54.10^{-6}\frac{N}{kg\cdot m}\cdot r$$

a) Valor del campo gravitatorio a una profundidad de *100 km.*

La distancia al centro del planeta es *r = 6371 km – 100 km = 6271 km.*

$$|\vec{g}| = 1{,}54.10^{-6}\frac{N}{kg\cdot m}6271.10^3\,m = 9{,}67\frac{N}{kg} \approx 9{,}67\frac{m}{s^2}$$

b) ¿A qué profundidad la intensidad del campo gravitatorio se reduce a la mitad de su valor en la superficie?. Valor estándar de $|\vec{g}| = 9{,}81\frac{N}{kg}$.

$$r = \frac{|\vec{g}|}{1{,}54.10^{-6}\frac{N}{kg\cdot m}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 9{,}81\frac{N}{kg}}{1{,}54.10^{-6}\frac{N}{kg\cdot m}} = 3185.10^3\,m = 3185\,km$$

La profundidad se mide desde la superficie terrestre y por lo tanto es:

h = R_T - r = 6371 km – 3185 km = 3186 km .

Lo que era de esperar pues al variar el campo gravitatorio proporcionalmente a la distancia al centro de la Tierra, tomará la mitad de su valor en la superficie, aproximadamente a la mitad del valor del radio terrestre.

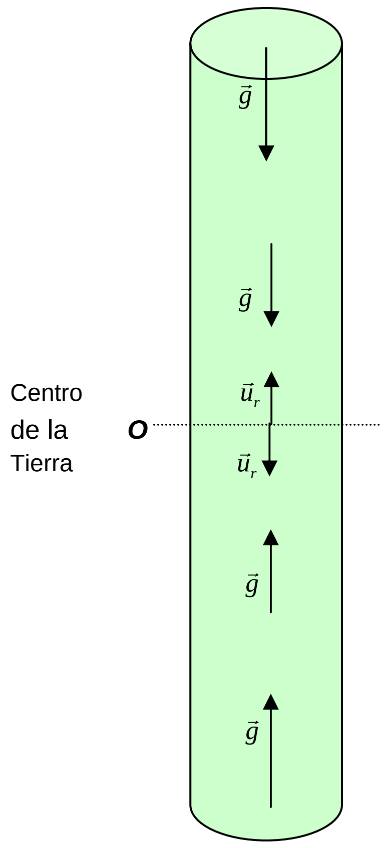


Fig.3.21. En un hipotético túnel que atravesara la Tierra desde un lugar hasta las antípodas, la aceleración de la gravedad apuntaría siempre hacia el centro de la Tierra *O.*

EJEMPLO RESUELTO

Considerando hipotéticamente que fuera posible realizar un túnel que atravesara el planeta Tierra pasando por su centro, desde un lugar de la superficie hasta otro situado en las antípodas, escribe una expresión vectorial para la aceleración de caída para un móvil que se abandonase en la superficie del túnel.

Considerando un vector unitario $\vec{u}_r$ con origen en el centro de la Tierra, el vector aceleración de la gravedad $\vec{g}$ tiene sentido opuesto y como en el ejemplo anterior hemos deducido su módulo resulta:

$$\vec{g} = -1{,}54.10^{-6}\,r\,\vec{u}_r$$

Es un vector que varía proporcionalmente con la distancia *r* al centro de la Tierra y que su sentido siempre va hacia el centro del planeta. En la fig.3.22 se representa el vector $\vec{g}$ en distintos puntos a lo largo del túnel, observa que hasta el centro de la Tierra tiene un sentido, pero al otro lado del centro el sentido es el opuesto. Si se lanzara un objeto, ganaría velocidad hasta el centro *O* y después disminuiría hasta alcanzar la superficie por el otro lado, con la misma velocidad de lanzamiento.

4 El péndulo simple

Para la medida experimental de la intensidad del campo gravitatorio se puede utilizar un péndulo. Vamos a describir el llamado péndulo simple.

Consiste en una masa *m* de pequeñas dimensiones, suspendida de un hilo inextensible de longitud L y de masa despreciable frente a la anterior. Si se desplaza la masa *m* de la posición de equilibrio, fig.3.22; aumenta su energía potencial y al dejarla libre tiende espontáneamente a disminuirla transformándola en cinética y de este modo se pone en movimiento. Como la única fuerza que efectúa trabajo sobre el péndulo es su peso, que es conservativo, su energía mecánica se conserva y en consecuencia oscilara una y otra vez transformando su energía potencial en cinética, ésta en potencial y así sucesivamente.

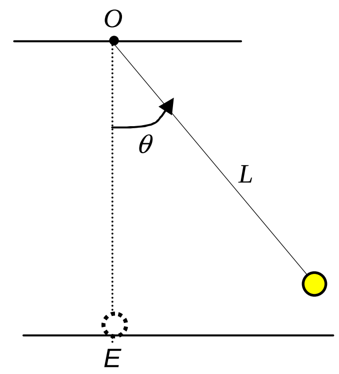


Fig.3.22. Al separar el péndulo de la posición de equilibrio, aumenta su energía potencial, a costa de la cual al dejarlo libre puede oscilar a uno y otro lado de la posición de equilibrio *OE*,.

Un análisis dinámico del péndulo cuando está en oscilación indica que las fuerzas que actúan son la tensión de la cuerda $\vec{T}$ y su peso $\vec{P}$. En este estudio consideramos despreciable la resistencia del aire.

Se descompone el peso $\vec{P}$ en dos componentes, fig.3.23, una en la dirección del hilo y otra en la dirección perpendicular *P sen* θ; tangente a la trayectoria. Después se aplica la ecuación de la dinámica [1.9], obteniéndose que la resultante de las fuerzas hacia *O* proporcionan a la masa oscilante la fuerza centrípeta para cambiar la dirección del vector velocidad, mientras que la componente tangencial *P sen* θ proporciona una aceleración tangencial a_T.

$$T - P\cos\theta = F_C \qquad T - P\cos\theta = m\cdot a_C$$

$$m\cdot a_T = -P\,sen\,\theta = -m\cdot g\ sen\,\theta \qquad m\cdot a_T = -\ m\cdot g\ sen\,\theta \qquad a_T = -g\,sen\,\theta$$

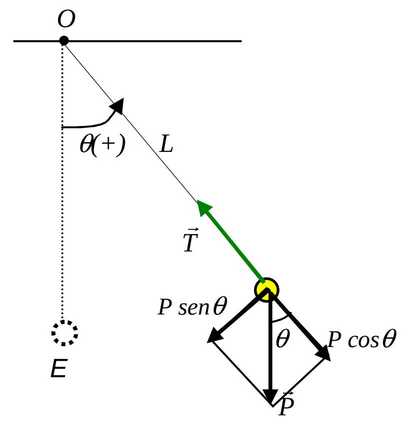


Fig.3.23. El péndulo oscila bajo las fuerzas $\vec{T}$ y $\vec{P}$. La componente del peso $P\ sen\ \theta$ actúa tangencialmente a la trayectoria y proporciona la aceleración tangencial $a_T = -\,g\ sen\ \theta$.

Ahora bien, en la fig.3.23, observamos que *P sen* θ tiene un sentido que es contrario al positivo de θ, (a la derecha de OE). Para tener en consideración esta circunstancia, se debe escribir en la ecuación un signo menos delante.

La aceleración tangencial es proporcional al *sen* θ, sin embargo si se hace oscilar al péndulo con pequeñas oscilaciones y θ se expresa en radianes, se puede hacer la aproximación: *sen* $\theta \approx \theta$ y resulta simplificada la expresión de la aceleración. Si además se pone θ en función de la longitud del arco x; y de la longitud del hilo L, fig.3.24, resulta:

$$a_T = -g\cdot\theta = -\ g\cdot\frac{x}{L} = -\frac{g}{L}\ x$$

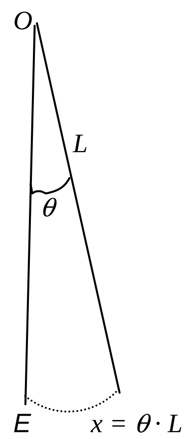


Fig.3.24. Relación arco-ángulo.

La razón g/L es constante, pero la aceleración que sufre la masa *m* es variable con la distancia x al punto de equilibrio *E*. Se dice que efectúa un movimiento vibratorio armónico, véase la unidad 4. En este movimiento la aceleración vale $a = -\frac{4\pi^2}{T^2}x$; siendo T el periodo de oscilación, o tiempo que emplea el péndulo en dar una oscilación de ida y vuelta completas. Igualando:

$$-\frac{g}{L}x = -\frac{4\,\pi^2}{T^2}x; \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad [3.18]$$

Para pequeñas oscilaciones, el periodo T del péndulo solo depende de la longitud del hilo y de la intensidad del campo gravitatorio. Si se miden experimentalmente L y T aplicando [3.18] se pude despejar el valor de g.

APÉNDICE

$$\frac{g_L}{g_T}=\frac{R_T^2}{r_L^2}$$

Aceleración de caída de un cuerpo en el campo gravitatorio terrestre

Considerando a la Luna en un punto *P* de la órbita que describe alrededor de la Tierra, si estuviese libre recorrería la línea recta *PM* tangente a la trayectoria en *P,* pero sin embargo debido a la atracción terrestre sigue el arco *PN.* Si en *O* se encuentra situado el centro de la Tierra alrededor del cual gira, cuando alcanza el punto *N,* la Luna ha caído la distancia *h,* aunque su distancia *r* al centro *O* no varía. Está distancia es la que vamos a tratar de calcular en la fig. 3.25, siendo las distancias $PM = QN = d;$ y $OQ = r - h.$ Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo OQN resulta:

$$(r-h)^2 + d^2 = r^2 \;; \qquad r^2 - 2rh + h^2 + d^2 = r^2 \;; \qquad -2rh + h^2 + d^2 = 0$$

Siempre que el ángulo θ sea pequeño, sucede que $h \ll r$ y el sumando h^2 se puede despreciar frente a los demás, con lo que resulta $h = d^2/2r$. Además, la longitud de trayectoria recorrida por la Luna *s,* entre los puntos *P* y *N,* no es muy distinta de la distancia *d,* así que sustituyendo *d* por *s :*

$$h = s^2/2r$$

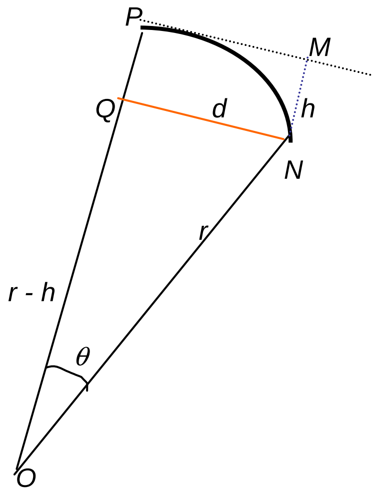


Fig.3.25 La Luna sigue la trayectoria *PN,* con relación al centro de la Tierra *O.* La distancia $OP = ON = r.$

En la época de Newton ya se conocían el radio de la órbita lunar medida con relación al centro de la Tierra, $r_L = 3{,}8.10^8\ m$ y el periodo del satélite $T = 27{,}3$ *días* $= 2{,}4.10^6\ s.$ Considerando que la órbita de la Luna es circular resulta para su velocidad:

$$v=\frac{longitud\ de\ la\ orbita}{periodo}=\frac{2\pi r_L}{T}=\frac{2\pi\cdot 3{,}8.10^8\ m}{2{,}4.10^6\ s}\approx 1000\frac{m}{s}$$

Ahora podemos preguntarnos por la distancia recorrida por la Luna en un segundo de tiempo y resulta: $s = v\cdot t = 1000\,m/s\cdot 1\,s \approx 1000\,m$.

Newton pensaba que del mismo modo que una manzana cae hacia la Tierra en un segundo una distancia $h_m = \frac{1}{2}9{,}8\,m/s^2\cdot 1\,s^2 = 4{,}9\,m$; la Luna debe caer una distancia:

$$h_L = \frac{s^2}{2r} = \frac{(1000\,m)^2}{2\cdot 3{,}8.10^8\ m} = 1{,}3.10^{-3}\ m = 1{,}3\,mm$$

Newton observó que la relación entre estas dos longitudes era:

$$\frac{h_L}{h_T}=\frac{1{,}3.10^{-3}\ m}{4{,}9\,m}\approx\frac{1}{3700}$$

y sabía además que la distancia desde la Luna al centro de la Tierra r_L *;* era unas 60 veces el radio terrestre: $r_L \approx 60\ R_T$ .La relación entre sus cuadrados

$$\frac{R_T^2}{r_L^2}=\frac{R_T^2}{60^2\ R_T^2}=\frac{1}{3600}$$

Que es un valor muy próximo al anterior. Como el movimiento de caída de estos cuerpos es uniformemente acelerado, resulta que $h = ½\, gt^2,$ y de aquí concluyó que la aceleración de caída que sufría cada uno, debería ser inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al centro de la Tierra.

$$\frac{g_L}{g_T}=\frac{R_T^2}{r_L^2} \qquad [3.1]$$

LOS PLANETAS	☿ MERCURIO	♀ VENUS	⊕ TIERRA	♂ MARTE	♃ JÚPITER	♄ SATURNO	⛢ URANO	♆ NEPTUNO	♇ PLUTÓN
Distancia media al Sol (UA)	0,39	0,72	1,00	1,52	5,20	9,54	19,18	30,06	39,44
Periodo de revolución alrededor del Sol (años)	0,24	0,62	1,00	1,88	11,86	29,46	84,01	164,79	247,7
Excentricidad de la órbita	0,21	0,01	0,02	0,09	0,05	0,06	0,05	0,01	0,25
Inclinación de la órbita (grados)	7,0	3,4	0,0	1,85	1,30	2,49	0,77	1,77	17,2
Masa (Tierra = 1)	0,06	0,82	1,00	0,11	317,8	95,1	14,5	17,2	0,004
Radio (Tierra = 1)	0,38	0,95	1,00	0,53	11,2	9,42	4,10	3,88	0,18
Densidad media (agua = 1)	5,4	5, 2	5,52	3,9	1,3	0,7	1,2	1,7	1,99
Periodo de rotación (sobre su eje)	58,7 días	243 días*	23,93 horas	24,6 horas	9,8 horas†	10,665 horas**	17,24 horas	16 horas	6,4 días
Inclinación del ecuador sobre la órbita (grados)	0	-2	23,5	22	3	22	98	29	?
Satélites conocidos	0	0	1	2	16	20+	15	8	1
Campo magnético en la superficie (Tierra = 1)	0,01	0,0	1	<0,01	14	0,67	0,1	?	?

Planetas principales

Notas: Una distancia de 1 unidad astronómica (UA) equivale a unos 150 millones de km. Un círculo tiene una excentricidad de 0,0 y una parábola 1,0. La inclinación de una órbita planetaria se mide con respecto al plano de la órbita de la Tierra. La masa de la Tierra es de 5,98 x 10^{24} kg, su radio medio es de 6.371 km y su campo magnético es de 0,31 gauss. La rotación de Venus (*) es retrógrada; los periodos de rotación de Júpiter (†) y Saturno (**) varían con la latitud, pero la rotación del interior se puede medir observando la radioemisión y se refleja aquí.