2 SISTEMAS DE PARTÍCULAS. SÓLIDO RÍGIDO

CONTENIDOS BÁSICOS

INFOFÍSICA

FOTOGRAFÍA DE LA VÍA LÁCTEA

El universo se compone de muchos Sistemas de Galaxias. Cada grupo también llamado Cúmulo, contiene varias unidades relacionadas entre si mediante interacciones gravitatorias que son las que predominan a grandes escalas. En el Cúmulo del que formamos parte se encuentra nuestra galaxia llamada La Vía Láctea y pertenece a un conjunto de 20 galaxias al que los astrónomos designan como Grupo Local.

A su vez, cada Galaxia está formada por cientos de miles de millones de estrellas y las estrellas contienen posiblemente sistemas planetarios semejantes a nuestros Sistema Solar. Las estrellas y los planetas con sus satélites son un mundo compuesto de átomos y moléculas, en distintos estados de la materia y de su evolución.

Desde el punto de vista de la Física Clásica, no resulta necesario conocer las características intimas de la materia para efectuar un estudio dinámico, pues los fenómenos físicos a los que está sometida, no modifican las propiedades físicas de los materiales en el transcurso de los fenómenos más habituales. Por esta razón, se considera a la materia constituida por partículas cuya composición no es necesario conocer, identificándolas por su masa y posición, respecto de un sistema de referencia.

1 Sistemas de partículas

Se considera un sistema de partículas como un conjunto de partículas de masas: m_1 , $m_2, \cdots m_n$; entre las que se ejercen unas fuerzas de interacción, llamadas fuerzas interiores al sistema. Además, sobre el sistema pueden actuar también fuerzas que proceden de interacciones con otras partículas situadas en el exterior del mismo, se conocen como fuerzas exteriores al sistema.

Cuando el sistema no intercambia partículas con el exterior se dice que es cerrado y si además no está sometido a fuerzas exteriores, se llama aislado.

1.2 Efectos de las fuerzas interiores y exteriores sobre el sistema

Vamos a considerar un sistema de partículas sometidas a fuerzas interiores y a fuerzas exteriores. Las fuerzas interiores al sistema se van a nombrar con letras minúsculas $\vec{f}$, detallando con dos subíndices las parejas de partículas que están en interacción, así, si sobre la partícula-*i* ejerce una fuerza la partícula-*j*, esta fuerza la designaremos como $\vec{f}_{ij}$. Evidentemente por el tercer principio de Newton sobre la partícula-*j* , actuará una fuerza igual y contraria que designaremos como $\vec{f}_{ji}$; verificándose entre ambas que

$$\vec{f}_{ji} = = -\vec{f}_{ij} \qquad (2.1)$$

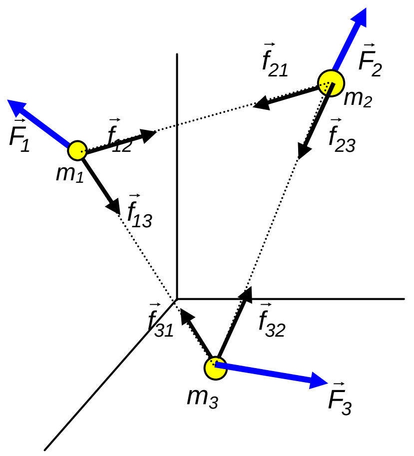

Fig.2.1. Conjunto de fuerzas interiores y exteriores aplicadas a un sistema de tres partículas.

Las fuerzas exteriores las llamaremos con letra mayúscula y con un solo subíndice, así $\vec{F}_i$ indica la resultante de todas las fuerzas exteriores aplicadas a la partícula-*i.*

Para facilitar el análisis de las fuerzas y de sus efectos dinámicos, vamos a tratar por sencillez, con un sistema formado únicamente por tres partículas, de masas respectivas m_1 , m_2 , m_3. Sin embargo, los resultados obtenidos serán completamente generales para un sistema de *n*-partículas.

En la fig.2.1 se representa el sistema de las tres partículas sometidas a las fuerzas interiores y exteriores. Para determinar la aceleración de una de las partículas habría que aplicar la ec.(1.9) sumando vectorialmente todas las fuerzas que actúan sobre la misma, sin embargo, ahora se pretende estudiar el sistema de partículas en su conjunto, para lo que necesario determinar el valor de la fuerza resultante aplicada al mismo, sumando todas las fuerzas que están aplicadas a cada partícula del sistema, tanto interiores como exteriores.

$$\vec{F} = \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \vec{F}_1 + \vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + \vec{F}_2 + \vec{f}_{31} + \vec{f}_{32} + \vec{F}_3$$

$$\vec{F} = \vec{f}_{12} + \vec{f}_{21} + \vec{f}_{13} + \vec{f}_{31} + \vec{f}_{23} + \vec{f}_{32} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0 + \sum_{i=1}^{3} \vec{F}_i \,(exteriores)$$

Las fuerzas interiores al ser iguales y de sentidos contrarios dos a dos, ec.(2.1), dan una resultante nula, de modo que la fuerza resultante viene determinada por las fuerzas exteriores. En general para un sistema de *n-partículas* será:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \,(exteriores) \qquad (2.2)$$

2 Centro de masas

Para estudiar con mayor comodidad un sistema de partículas vamos a definir un punto ideal, llamado *el centro de masas*, en el que se considera concentrada toda la masa del sistema, es decir $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$.

Las partículas del sistemas vienen determinadas respecto de un Sistema de Referencia con origen en *O,* fig.2.2, por los vectores de posición, $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$; mientras que el centro de masas (c.d.m) cuya posición es desconocida, viene definido por el vector $\vec{r}_{cm}$.

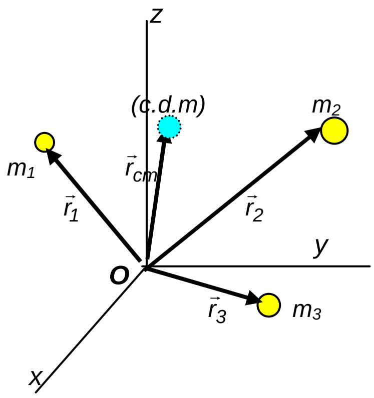

Fig.2.2 Sistema de 3 partículas con sus vectores de posición respecto de los ejes cartesianos en ***O.*** El centro de masas del sistema *(c.d.m)* es un punto matemático que carece de realidad física, aunque su introducción facilita mucho el estudio del sistema, pues todo sucede como si la masa de todo el sistema, estuviese concentrada en el extremo del vector de posición $\vec{r}_{cm}$.

Para un sistema de *n-partículas* se define el vector de posición del centro de masas, sumando vectorialmente el producto de la masa de cada partícula por su vector de posición y dividiendo esta suma por la masa total del sistema.

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + \cdots\cdots + m_i \vec{r}_i + \cdots\cdots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + \cdots\cdots + m_i + \cdots\cdots\cdots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m} \qquad (2.3)$$

En coordenadas cartesianas cada vector tiene tres componentes de modo que el vector de posición del (c.d.m) será: $\vec{r}_{cm} = x_{cm}\,\vec{i} + y_{cm}\,\vec{j} + z_{cm}\,\vec{k}$ y sus componentes resultan de la ec.(2.3):

$$x_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\, x_i}{m} \qquad y_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\, y_i}{m} \qquad z_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\, z_i}{m}$$

Ejemplo 1.1

Un sistema de partículas está formado por las masas: m_1 = 2 kg situada en (0,0,0); m_2 = 4 kg situada en (1,1,1); m_3 = 6 kg situada en (1,0,1); m_4 = 8 kg situada en (1,1,0); m_5 = 10 kg situada en (0,1,1). Determina la posición del (c.d.m) del sistema, sabiendo que las distancias se miden en m.

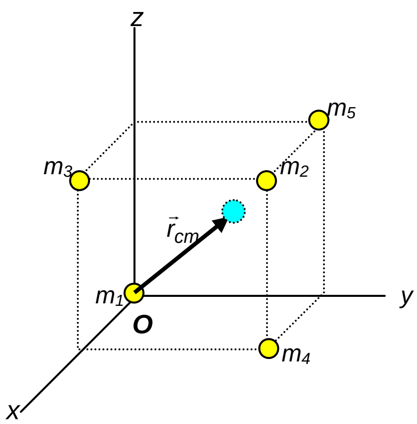

Fig.2.3 Sistema de cinco partículas que ocupan posiciones situadas en los vértices de un cubo. El centro de masas viene determinado por el vector $\vec{r}_{cm}$

$$x_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\, x_i}{m} = \frac{2\cdot 0 + 4\cdot 1 + 6\cdot 1 + 8\cdot 1 + 10\cdot 0}{2+4+6+8+10} = \frac{18}{30} = 0{,}60\,m$$

$$y_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\, y_i}{m} = \frac{2\cdot 0 + 4\cdot 1 + 6\cdot 0 + 8\cdot 1 + 10\cdot 1}{30} = \frac{22}{30} = 0{,}73\,m$$

$$z_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\, z_i}{m} = \frac{2\cdot 0 + 4\cdot 1 + 6\cdot 1 + 8\cdot 0 + 10\cdot 1}{30} = \frac{20}{30} = 0{,}67\,m$$

Resultando para el vector de posición del (c.d.m):

$$\vec{r}_{cm} = 0{,}60\,\vec{i} + 0{,}73\,\vec{j} + 0{,}67\,\vec{k} \quad \text{en} \quad m$$

2.1 Velocidad del centro de masas

El estudio del movimiento de un sistema de partículas se simplifica mucho considerando el movimiento de su centro de masas.

Sea un sistema de *n-partículas* que se mueven respecto de un sistema de referencia con velocidades respectivas: $\vec{v}_1 , \cdots\cdots\cdots \vec{v}_i \cdots\cdots\cdots \vec{v}_n$. El momento lineal total del sistema se define como la suma vectorial, de los momentos lineales de cada una de sus partículas.

$$\vec{P} = m_1 \vec{v}_1 + \cdots\cdots + m_i \vec{v}_i + \cdots\cdots + m_n \vec{v}_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \qquad (2.4)$$

Ahora bien la posición del centro de masas viene dada por el vector $\vec{r}_{cm}$ que proporciona la ec.(2.3). La velocidad del centro de masas $\vec{V}_{cm}$ se obtiene derivando el vector de posición del (c.d.m) respecto del tiempo.

$$\vec{V}_{cm} = \frac{d\,\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m}\right] = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\,\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i$$

Comparando con la ec.(2.4) podemos escribir para la velocidad del (c.d.m).

$$\vec{V}_{cm} = \frac{\vec{P}}{m} \qquad (2.5)$$

El centro de masas del sistema de partículas se mueve respecto de un sistema de referencia, igual que si fuese una sola partícula que tuviese toda la masa del sistema *m* , y cuyo momento lineal fuese igual al momento lineal total del mismo. Cuando para un sistema de muchas partículas como un automóvil o la misma Tierra, nos preguntamos por la velocidad del mismo, lo que en realidad estamos expresando es la velocidad de su centro de masas. Así respecto de unos ejes en el Sol, la velocidad del (c.d.m) de nuestro planeta es de *30 km/s.*

La ecuación (2.5) se puede escribir como $\vec{P} = m\,\vec{V}_{cm}$; indicando que el momento lineal del (c.d.m) considerado como una partícula de masa igual a la total del sistema y moviéndose a la velocidad $\vec{V}_{cm}$; es el mismo que el momento lineal de todo el sistema de partículas.

Ejemplo 2.1

En el sistema de partículas del ***ejemplo 1.1****. en un determinado instante las velocidades de las partículas respecto del origen de referencia son:* $\vec{v}_1 = 2\vec{i}$; $\vec{v}_2 = -2\vec{j}$; $\vec{v}_3 = -\vec{i} + 2\vec{k}$; $\vec{v}_4 = 3\vec{i} + 4\vec{j}$; $\vec{v}_5 = \vec{i} - \vec{k}$; *medidas en m/s. Determina el momento lineal del sistema y la velocidad del centro de masas en ese instante.*

$$\vec{P} = 2\cdot 2\vec{i} + 4\cdot\left(-2\vec{j}\right) + 6\cdot\left(-\vec{i} + 2\vec{k}\right) + 8\cdot\left(3\vec{i} + 4\vec{j}\right) + 10\cdot\left(\vec{i} - \vec{k}\right) = 32\vec{i} + 24\vec{j} + 2\vec{k} \quad \text{en kg·m/s.}$$

La velocidad del centro de masas será:

$$\vec{V}_{cm} = \frac{\vec{P}}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5} = \frac{32\vec{i} + 24\vec{j} + 2\vec{k}}{2 + 4 + 6 + 8 + 10} = \frac{32}{30}\vec{i} + \frac{24}{30}\vec{j} + \frac{2}{30}\vec{k} \quad \text{en m/s}$$

2.2 Aceleración del centro de masas

Para calcular la aceleración con que se mueve el centro de masas respecto de unos ejes de referencia inerciales, vamos a derivar respecto del tiempo, la ec.(2.5) que proporcionó su velocidad, teniendo en cuenta que en ella figura el momento lineal total del sistema $\vec{P} = \vec{p}_1 + \cdots\cdots + \vec{p}_i + \cdots\cdots + \vec{p}_n$

$$\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{V}_{cm}}{dt} = \frac{1}{m}\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{1}{m}\left[\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \cdots\cdots + \frac{d\vec{p}_i}{dt} + \cdots\cdots + \frac{d\vec{p}_n}{dt}\right]$$

En esta ecuación figura individualmente, la derivada respecto del tiempo del momento lineal de cada partícula, que de acuerdo con el segundo principio de Newton es igual a la suma de todas las fuerzas aplicadas a la misma, que son fuerzas interiores al sistema y fuerzas exteriores.

Considerando para simplificar, un sistema de solo 3 partículas resulta:

$$\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{V}_{cm}}{dt} = \frac{1}{m}\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{1}{m}\left[\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} + \frac{d\vec{p}_3}{dt}\right]$$

$$\vec{a}_{cm} = \frac{1}{m}\left[\vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \vec{F}_1 + \vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + \vec{F}_2 + \vec{f}_{31} + \vec{f}_{32} + \vec{F}_3\right] = \frac{1}{m}\left[\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3\right]$$

Pues las fuerzas interiores son iguales dos a dos, $\vec{f}_{ji} = = -\vec{f}_{ij}$. En general si el sistema tiene *n-partículas,* resulta para la aceleración del centro de masas

$$\vec{a}_{cm} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i(exteriores) \qquad (2.6)$$

El centro de masas de un sistema de partículas se mueve con la misma aceleración de una sola partícula, que tuviera toda la masa del sistema y sobre la que estuvieran actuando todas las fuerzas exteriores aplicadas al sistema.

Si el sistema está aislado, las fuerzas exteriores y su resultante son nulas y la ec.(2.6) indica que también lo es la aceleración del centro de masas. En consecuencia su velocidad $\vec{V}_{cm}$ será constante, es decir, si está en reposo seguirá en reposo y si está en movimiento, este será rectilíneo y uniforme.

Ejemplo 2.2

Un sistema de cuatro partículas de masas: m_1= 1 kg; m_2= 2 kg; m_3= 3 kg: m_4= 4 kg están unidas por varillas rígidas de masas despreciables, fig.2.4. Sobre las partículas actúan las fuerzas exteriores: $\vec{F}_1 = 2\,\vec{i}$; $\vec{F}_2 = 3\,\vec{j}$; $\vec{F}_3 = \vec{i} - \vec{j}$; $\vec{F}_4 = -2\,\vec{j}$ medidas en N, determina la aceleración del (c.d.m). Si el sistema inicialmente se encuentra en reposo, calcula la velocidad del (c.d.m) a los 10 s.

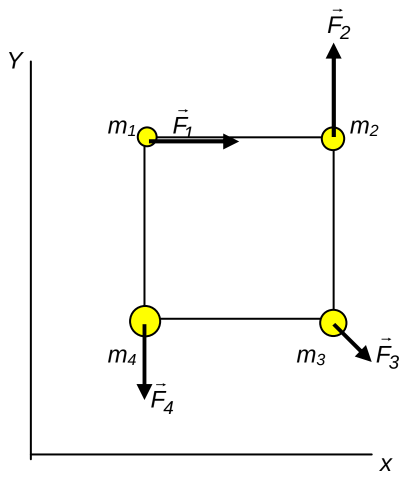

Fig.2.4. Sistema de partículas unidas entre sí por varillas de masas despreciables y sometidas a fuerzas exteriores al sistema. Las fuerzas interiores están proporcionadas por las varillas rígidas que las unen y pero no se representan en el dibujo.

$$\vec{a}_{cm} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i(exteriores) = \frac{1}{1+2+3+4}\left(2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{j}\right) = 0{,}3\,\vec{i}\ \frac{m}{s^2}$$

Aceleración constante. El movimiento del (c.d.m) es uniformemente acelerado..

$$\vec{V}_{cm} = \vec{a}_{cm}\cdot t = 0{,}3\,\vec{i}\ \frac{m}{s^2}\cdot 10\,s = 3\,\vec{i}\ \frac{m}{s}$$

3 Momento angular de un sistema de partículas

Consideramos un sistema de tres partículas de masas: m_1 , m_2, m_3 , que se mueven respecto de un sistema de referencia inercial con origen en ***O***, fig.2.5, con velocidades: $\vec v_1 ,\vec v_2 ,\vec v_3$; y cuyos vectores de posición en un cierto instante son: $\vec r_1 ,\vec r_2 ,\vec r_3$. El momento angular del sistema de partículas respecto del punto ***O***, se define como la suma vectorial de los momentos angulares de cada una de las partículas, respecto del citado punto.

$$\vec L_o = \vec L_1 + \vec L_2 + \vec L_3 = \vec r_1 \wedge m_1 \vec v_1 + \vec r_2 \wedge m_2 \vec v_2 + \vec r_3 \wedge m_3 \vec v_3$$

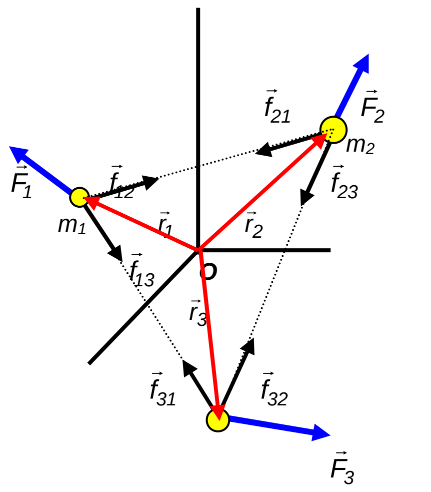

Fig.2.5 Sistema de tres partículas con los vectores de posición respecto del punto ***O***, y las fuerzas interiores y exteriores que actúan sobre el sistema.

Una propiedad muy importante del momento angular se obtiene de estudiar su variación con el tiempo, para lo que es necesario derivar con respecto a la variable tiempo la ecuación anterior.

$$\frac{d\vec L_o}{dt} = \frac{d\vec L_1}{dt} + \frac{d\vec L_2}{dt} + \frac{d\vec L_3}{dt}$$

Ahora bien, según la ec.(1.18) la derivada respecto del tiempo del momento angular es igual al momento de la fuerza que actúa sobre la partícula. En nuestro caso sobre cada partícula actúan momentos debidos a las fuerzas interiores y exteriores al sistema.

$$\frac{d\vec L_o}{dt} = \vec r_1 \wedge \left(\vec f_{12} + \vec f_{13} + \vec F_1\right) + \vec r_2 \wedge \left(\vec f_{21} + \vec f_{23} + \vec F_2\right) + \vec r_3 \wedge \left(\vec f_{31} + \vec f_{32} + \vec F_3\right)$$

Teniendo en cuenta la propiedad distributiva del producto vectorial respecto de la suma y que las fuerzas interiores son iguales dos a dos, resulta: $\vec f_{21} = = -\vec f_{12}$; $\vec f_{31} = = -\vec f_{13}$; $\vec f_{32} = = -\vec f_{23}$. Realizando operaciones en la ecuación

$$\frac{d\vec L_o}{dt} = \left(\vec r_1 - \vec r_2\right) \wedge \vec f_{12} + \left(\vec r_1 - \vec r_3\right) \wedge \vec f_{13} + \left(\vec r_2 - \vec r_3\right) \wedge \vec f_{32} + \vec r_1 \wedge \vec F_1 + \vec r_2 \wedge \vec F_2 + \vec r \wedge \vec F_3$$

Se puede observar en la fig.2.6 que el vector que resulta de restar los vectores de posición y la fuerza interior sobre cada partícula, son vectores paralelos por lo que su producto vectorial es cero.

$$\left(\vec r_1 - \vec r_2\right) \wedge \vec f_{12} = 0 ; \qquad \left(\vec r_1 - \vec r_3\right) \wedge \vec f_{13} = 0 ; \qquad \left(\vec r_2 - \vec r_3\right) \wedge \vec f_{32} = 0$$

$$\frac{d\vec L_o}{dt} = \vec r_1 \wedge \vec F_1 + \vec r_2 \wedge \vec F_2 + \vec r \wedge \vec F_3 = \vec M_1 + \vec M_2 + \vec M_3 = \sum_{i=1}^{3} \vec M_i$$

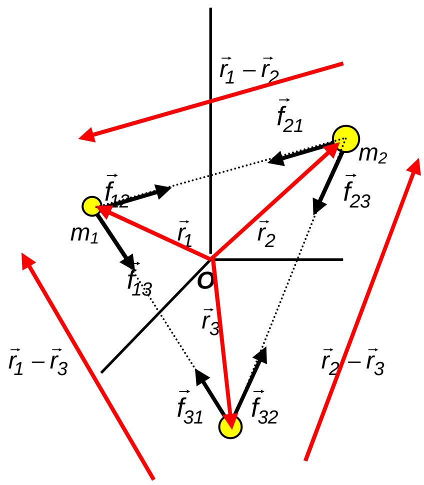

Fig.2.6. En el dibujo se puede ver como los vectores que resultan de restar los vectores de posición, que han sido llevados a los laterales para facilitar su observación, (por ejemplo $\vec r_1 - \vec r_2$ resulta paralelo a la fuerza interior $\vec f_{12}$) con lo que el producto vectorial $\left(\vec r_1 - \vec r_2\right) \wedge \vec f_{12} = 0$ Sucediendo lo mismo con los demás productos vectoriales en los que entran fuerzas interiores.

Donde los productos vectoriales de cada vector posición, por la fuerza exterior aplicada a cada partícula, es el momento de esta fuerza respecto del punto *O.*

Para un sistema de *n-partículas* se verifica, que la variación respecto del tiempo del momento angular total del sistema, es igual a la suma de los momentos de las fuerzas exteriores aplicadas a todas las partículas del sistema. El momento angular y los momentos de las fuerzas han de estar calculados respecto del mismo punto.

$$\frac{d\vec L_o}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec M_i \left(exteriores\right) = \vec M_o \qquad (2.7)$$

4 Energía cinética de un sistema de partículas

Consideremos un sistema de *n-partículas* de masas: $m_1 \cdots\cdots m_i \cdots\cdots m_n$ que se mueven con las velocidades: $\vec{v}_1 \cdots\cdots \vec{v}_i \cdots\cdots \vec{v}_n$, respecto de un sistema de referencia en *O,* fig.2.7. La energía cinética del sistema se define como la suma de las energías cinéticas de cada una de sus partículas.

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \cdots\cdots + \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \cdots\cdots + \frac{1}{2} m_n v_n^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i v_1^2 \qquad (2.8)$$

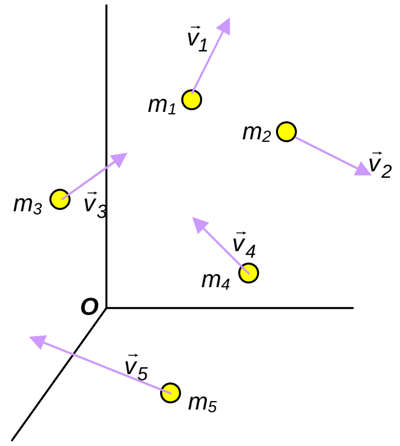

Fig.2.7. Sistema de partículas en movimiento, respecto de los ejes en ***O.*** El sistema posee energía cinética.

Sobre las partículas del sistema están actuando en general, fuerzas interiores y exteriores al mismo, con lo que la energía cinética total del sistema variará en razón del trabajo realizado por todas las fuerzas aplicadas, tanto interiores como exteriores. Sin entrar en demostraciones, la ecuación de la energía aplicada a un sistema de partículas indica que el trabajo realizado por las fuerzas interiores y exteriores al sistema, se invierte en variar su energía cinética.

$$W(F_{int\,eriores}) + W(F_{exteriores}) = E_{c2} - E_{c1} = \Delta E_c(sistema) \qquad (2.9)$$

Así por ejemplo, estos trabajos son los realizados por las fuerzas interiores y exteriores (el peso), sobre las partículas de un proyectil cuando explota y mientras que los fragmentos están en movimiento.

5 Conservación de los momentos lineal y angular

Consideremos un sistema de *n-partículas* en movimiento respecto de un sistema de referencia. Hemos aprendido que el centro de masas se mueve con la misma aceleración de una sola partícula, que tuviera toda la masa del sistema y sobre la que estuvieran actuando todas las fuerzas exteriores aplicadas al mismo. Sin embargo si sobre el sistema no actúan fuerzas exteriores de acuerdo con la ec.(2.6) la aceleración del (c.d.m) es nula.

$$\vec{a}_{cm} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i(exteriores) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{V}_{cm} = cte$$

Como el momento lineal total del sistema de partículas, es igual al momento lineal de su centro de masas, $\vec{P} = m\vec{V}_{cm}$; en este caso resulta constante por serlo los dos factores. *Si sobre un sistema de partículas no actúan fuerzas exteriores, el momento lineal total del sistema se conserva.*

Por otra parte hemos visto ec.(2.7), que la variación respecto del tiempo del momento angular total de un sistema de partículas, es igual al momento resultante de los momentos de las fuerzas exteriores aplicados al mismo. Cuando suceda que el momento resultante de las fuerzas es nulo, porque no haya fuerzas exteriores, o por que se cancelan los momentos entre sí, entonces la variación del momento angular del sistema respecto del tiempo será nulo y por tanto el momento angular del sistema permanece constante.

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i(exteriores) = 0\,; \qquad \Rightarrow \qquad \vec{L}_o = cte$$

Si el momento resultante de los momentos de las fuerzas exteriores, aplicadas sobre un sistema de partículas es nulo, entonces el momento angular total del sistema se conserva.

6 Sistema de referencia en el centro de masas

En ocasiones resulta necesario estudiar el movimiento de las partículas del sistema, respecto de un sistema de referencia que no gire y cuyo origen está el centro de masas. Observa la fig.2.8, donde éste punto se representa por ***c.m.*** ¿Cuanto valen ahora respecto del centro de masas ***c.m.*** el momento lineal, el momento angular y la energía cinética total del sistema?.

El momento lineal del sistema es $\vec{P} = m\vec{V}_{cm}$. Si los ejes están en el (c.d.m) la velocidad respecto de si mismo es nula. En consecuencia, en el sistema de referencia en el (c.d.m), el momento lineal del sistema es siempre nulo.

El momento angular del sistema de partículas respecto del (c.d.m) que se designa por $\vec{L}_{cm}$, es la suma de los momentos angulares de cada una de las partículas respecto de éste punto.

El momento angular del sistema respecto del (c.d.m) $\vec{L}_{cm}$, se relaciona con el momento angular $\vec{L}_o$, respecto de ejes inerciales en ***O,*** por la ecuación.

$$\vec{L}_o = \vec{L}_{cm} + \vec{r}_{cm} \wedge m\vec{V}_{cm}$$

El momento angular de un sistema de partículas respecto de un punto *O* en reposo respecto de un sistema inercial, es la suma del momento angular respecto del (c.d.m), más el momento angular del (c.d.m) considerado como una partícula que tuviera toda la masa del sistema y moviéndose a la velocidad de éste, respecto del punto *O*.

La energía cinética del sistema de partículas respecto del (c.d.m), $E_{c,cm}$; se obtiene sumando las energías cinéticas de cada una de las partículas del sistema, considerando sus velocidades referidas a los ejes en el (c.d.m).

La energía cinética del sistema respecto de ejes inerciales E_c ; se relaciona con la energía cinética con relación al centro de masas $E_{c,cm}$ por:

$$E_c = E_{c,cm} + \frac{1}{2} m V_{cm}^2$$

La energía cinética de un sistema de partículas con relación a un sistema inercial, es igual a la energía cinética del sistema respecto de su (c.d.m) más la energía cinética del (c.d.m) considerado como una partícula que tuviera toda la masa del sistema y moviéndose a la velocidad de éste.

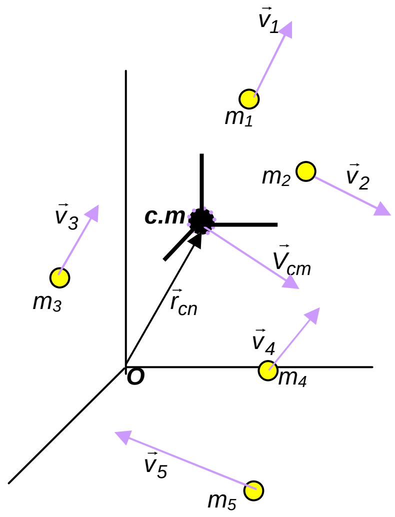

Fig.2.8. Sistema de partículas en el que se ha representado la posición del centro de masas del mismo, como ***c.m.*** Además, referido al sistema de referencia inercial en ***O,*** su vector de posición $\vec{r}_{cn}$ y el vector velocidad $\vec{V}_{cm}$ **.**

Ejemplo 6.1

Un sistema se compone de tres partículas de masas m_1*= 1 kg;* m_2*= 2 kg;* m_3*= 3 kg con velocidades respecto de un sistema inercial:* $\vec{v}_1 = 3\vec{i}$; $\vec{v}_2 = 2\vec{i} - 2\vec{j}$; $\vec{v}_3 = 4\vec{j}$. *Calcula la velocidad del (c.d.m) y la energía cinética del sistema respecto del (c.d.m)*

$$\vec{V}_{cm} = \frac{\vec{P}}{m} = \frac{1\cdot 3\vec{i} + 2\left(2\vec{i} - 2\vec{j}\right) + 3\cdot 4\vec{j}}{1+2+3} = \frac{7}{6}\vec{i} + \frac{8}{6}\vec{j} \;; \qquad V_{cm} = \sqrt{\left(\frac{7}{6}\right)^2 + \left(\frac{8}{6}\right)^2} = 1{,}8\, m/s$$

$$E_{c,cm} = E_c - \frac{1}{2} m V_{cm}^2 = \left[\frac{1}{2} 1\cdot 3^2 + \frac{1}{2} 2\cdot\left(\sqrt{2^2 + (-2)^2}\right)^2 + \frac{1}{2} 3\cdot 4^2\right] - \frac{1}{2}(1+2+3)\cdot 1{,}8^2$$

$$E_{c,cm} = 26{,}8\ J$$

7 Choques entre las partículas de un sistema

Las partículas de un sistema pueden estar en movimiento y colisionar entre si. En los contactos se ejercen fuerzas interiores que pueden ser de gran intensidad durante tiempos muy cortos. Las fuerzas exteriores que también puedan estar actuando durante la colisión, generalmente son pequeñas frente a las fuerzas interiores en los instantes del impacto, de modo que pueden despreciarse y estudiar el sistema de partículas como si se tratara de un sistema aislado, sobre el que no actuasen fuerzas exteriores. *En consecuencia, durante un choque o colisión, se conserva el momento lineal total del sistema, es decir, antes y después del choque vale lo mismo.*

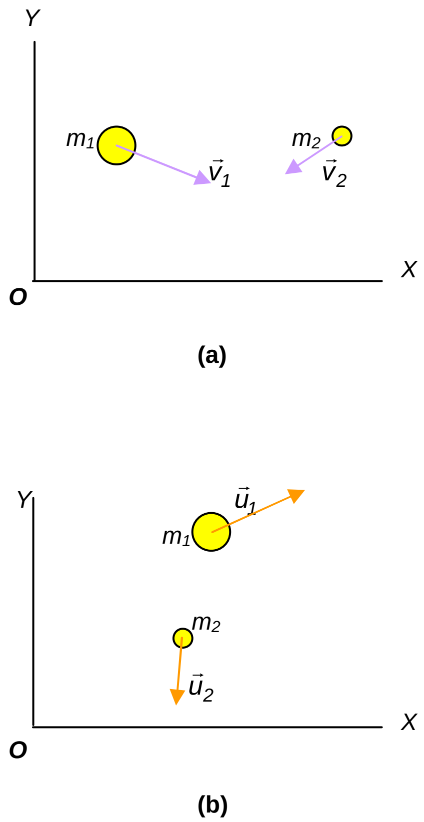

Fig.2.9. Las partículas del sistema en **(a)** antes de colisionar y en **(b)** después de la colisión. Durante el choque el momento lineal total del sistema se conserva.

Si consideramos un sistema de dos partículas de masas m_1 y m_2 que se mueven respectivamente antes del choque con velocidades $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$; mientras que después del choque lo hacen con velocidades $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$; fig.2.9 el principio de conservación del momento lineal permite escribir:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 \qquad (2.10)$$

7.1 Choques en la misma dirección

Si las partículas que chocan se encuentran moviéndose sobre la misma línea recta entonces la ecuación (2.10) se simplifica muchísimo pues al estar todos los vectores velocidad según el eje X, se puede prescindir del carácter vectorial y asignar signo positivo a las velocidades con sentido igual al del unitario $\vec{i}$, fig.2.10, y negativo a las de sentido contrario. La ec.(2.10) de la conservación del momento lineal quedará:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \qquad (2.11)$$

En los choques unidimensionales se define el coeficiente de restitución o percusión, como la razón cambiada de signo, entre las velocidades relativas después y antes del choque.

$$k = -\frac{u_1 - u_2}{v_1 - v_2} \qquad (2.12)$$

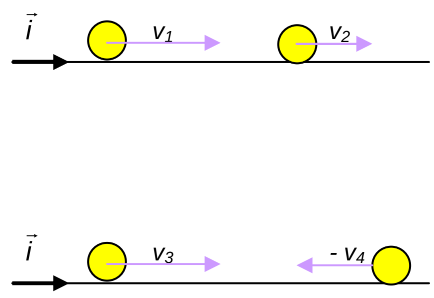

Fig.2.10 Las partículas cuya velocidad tenga igual sentido que el vector unitario $\vec{i}$, como: v_1, v_2, y v_3 se toman positivas y las que tienen sentido opuesto, como la v_4 se ponen negativas.

El choque se llama elástico cuando se conserva la energía cinética total del sistema. Para calcular las velocidades después de chocar, se aplican la ec.(2.11) y la de la conservación de la energía cinética.

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2$$

Puede demostrarse, que en este caso el coeficiente de restitución es $k = 1$.

El choque es parcialmente inelástico, cuando no se conserva la energía cinética y los cuerpos se deforman durante el choque, para separarse después. Parte de la energía cinética inicial, se emplea en producir trabajo de deformación W_D. El coeficiente de restitución vale $0 < k < 1$.

El choque es totalmente inelástico o plástico, cuando los cuerpos se deforman y quedan unidos, moviéndos a igual velocidad *u.* El coeficiente de restitución es nulo, $k = 0$. La conservación de la energía permite escribir:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) u^2 + W_D$$