Teoría de la relatividad especial

Principio de relatividad de Einstein

La primera ley de Newton no distingue entre un cuerpo en reposo y otro que se mueva con velocidad constante. El movimiento absoluto no puede ser detectado (no existe un marco de referencia universal) y las leyes de la mecánica, en particular la 2.ª ley de Newton, son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales.

Es decir, ningún experimento puede servir para diferenciar entre dos sistemas de referencia inerciales. Lo único que se puede diferenciar es el movimiento relativo de uno respecto a otro. Sea S el sistema de referencia del laboratorio y S' el sistema de referencia que se mueve con velocidad constante v respecto de S (fig. 10.21). La posición y el instante en que ocurre un evento (fenómeno físico) en S, se especifica por las coordenadas (x, t), mientras que en S' por (x', t'). Estas coordenadas están relacionadas por las ecuaciones:

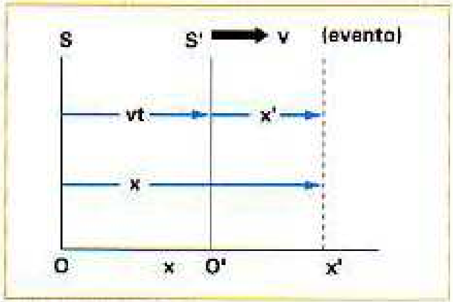


Fig. 10.21. Posición de un evento respecto de los ejes.

$$x' = x - vt \; ; \; t' = t \qquad [10.20]$$

que se conocen como *transformación galileana de las coordenadas.*

Nótese que la coordenada tiempo es la misma en S y S'. Dentro del marco de la mecánica clásica el tiempo es universal. Si dos eventos (las posiciones de un objeto) están separados una distancia Δx y un intervalo de tiempo Δt, medidos por un observador en S, se sigue de la ecuación [10.20] que el correspondiente desplazamiento $\Delta x'$ medido por un observador en S' viene dado por $\Delta x' = \Delta x - v\Delta t$. Dividiendo ésta expresión por Δt, en el límite $\Delta t \to 0$, se tiene:

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} - v \quad \Rightarrow \quad u'_x = u_x - v \qquad [10.21]$$

Es decir, la velocidad del evento depende del observador.

A finales del siglo XIX los científicos se preguntaban si el principio de relatividad newtoniana se aplicaba también a experimentos de electricidad, óptica u otros campos. Si así era, surgía una paradoja respecto de la velocidad de la luz, porque de acuerdo con la teoría electromagnética de Maxwell, la velocidad de la luz en el vacío tiene valor constante, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, lo que entra en contradicción con la ley galileana de composición de velocidades.

En consecuencia, la velocidad de la luz no debería ser la misma en todos los sistemas inerciales y su valor tendría que depender del movimiento del observador.

Para poder resolver esta paradoja se concluyó en que o la transformación galileana es incorrecta, o las leyes de la electricidad y magnetismo no son las mismas en todos los sistemas inerciales. Si la ley galileana de velocidades es incorrecta, hay que abandonar las nociones, aparentemente obvias, de tiempo y longitud absolutas.

Si la segunda alternativa es cierta, debe existir un sistema de referencia "preferente" en el que la velocidad de la luz toma el valor c, y ésta tendrá un valor menor o mayor que c, dependiendo del sistema de referencia, según supone la ley galileana de composición de velocidades.

En el siglo XIX los científicos pensaban que las ondas electromagnéticas requerían un medio para propagarse, al que denominaron *éter*.

Se suponía que estaba presente en cualquier parte, aún en el vacío, y las ondas electromagnéticas se reconocían como oscilaciones de ese éter. Se pensaba entonces que las leyes de Maxwell tomarían su forma simple en un sistema de referencia en reposo respecto al éter. Las leyes de la electricidad y magnetismo serían válidas en ese sistema de referencia absoluto, ligado al hipotético éter, y en otro sistema de referencia que se moviera respecto de él, sería necesario modificarlas.

En particular, si la velocidad de la Tierra respecto del éter es v, entonces la velocidad de la luz debe tener su valor máximo, $c + v$, cuando se propaga a favor del "viento del éter", y un valor mínimo, $c - v$, cuando se propaga contra el "viento del éter" (fig. 10.22).

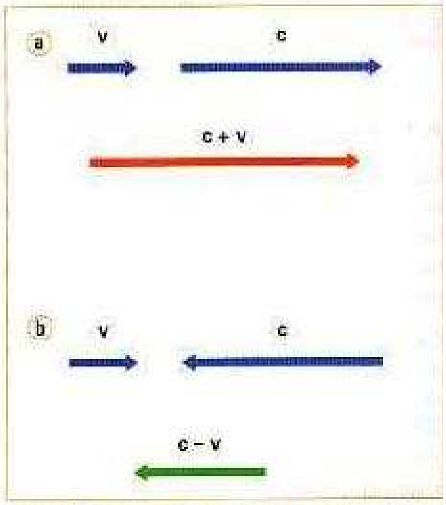


Fig. 10.22. Si la velocidad del viento del éter respecto a la Tierra es v, y c la velocidad de la luz relativa al éter, la velocidad de la luz relativa a la Tierra es: a) c + v, en el sentido del viento; b) c − v en un sentido contrario al viento.

A. Michelson (1852-1931) y E. Morley (1838-1923) iniciaron en 1881 una serie de experimentos para medir la velocidad de la luz en diferentes posiciones con respecto a la Tierra (fig. 10.23). Los resultados negativos del experimento llevaron a A. Einstein (1879-1955) en 1905 a descartar la existencia de un éter. En su lugar propuso, como ley universal de la naturaleza, que:

La velocidad de la luz es un invariante físico, y tiene el mismo valor para todos los observadores que están en movimiento relativo uniforme.

Desde entonces, muchos experimentos han confirmado la invariancia de la velocidad de la luz. Según Einstein, "las mismas leyes del electromagnetismo y de la óptica serán validas en todos los sistemas de referencia para los cuales las ecuaciones de la mecánica se cumplen".

Esta afirmación, que es una generalización del principio de relatividad de Newton, es conocida como el **principio de relatividad de Einstein**, y tiene en cuenta implícitamente la invariancia de la velocidad de la luz, se enuncia:

Todas leyes de la Física son las mismas en los sistemas de referencia inerciales.

Como consecuencia, la transformación galileana de coordenadas no es la correcta, al no conservar la invariancia de la velocidad de la luz.

Transformación de Lorentz

Busquemos la transformación de coordenadas más sencilla (con orígenes coincidentes cuando $t = t' = 0$) que permita la invariancia de la velocidad de la luz. Debemos tener en cuenta que, debido a esta invariancia, los tiempos t y t' que se midan en los dos sistemas de referencia serán diferentes. Se postula entonces una transformación de coordenadas del tipo:

$$x' = \gamma(x - vt) \qquad [10.22]$$

donde γ depende sólo del modulo de la velocidad relativa, v, entre S y S'. Al ser los dos sistemas de referencia totalmente equivalentes, y las velocidades relativas de sentidos contrarios, la transformación inversa de [10.22] debe ser:

$$x = \gamma(x' + vt') \qquad [10.23]$$

Fig. 10.23. Michelson y Morley utilizaron un tipo especial de instrumento, denominado interferómetro, para medir la velocidad de la luz a través del éter.

En ésta última ecuación, despejando la coordenada x', $x' = x/\gamma - vt'$, se debe reproducir la primera ecuación, por lo que los instantes de tiempo t y t' deberán estar relacionados de la forma

$$t' = \gamma\left(t - \frac{x}{v} \cdot \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}\right) \qquad [10.24]$$

Si $\gamma = 1$, se reproducirá la transformación galileana en la que $t = t'$.

Para determinar γ, consideremos un pulso de luz que comienza a emitirse en el origen de S en el instante $t = 0$. Ya que hemos supuesto que los orígenes de S y S' son coincidentes en $t = t' = 0$, dicho pulso de luz también comienza a emitirse en el origen de S' en $t' = 0$.

El principio de relatividad de Einstein requiere que la ecuación para la componente x del frente de onda del pulso de luz sea $x = ct$ en S, y $x' = ct'$ en S'. Sustituyendo en las ecuaciones [10.22] y [10.23],

$$ct' = \gamma(ct - vt) = \gamma(c - v)t \;;\; ct = \gamma(ct' + vt') = \gamma(c + v)t' \qquad [10.25]$$

Eliminando de estas dos últimas ecuaciones t y t' se obtiene:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad [10.26]$$

Las ecuaciones de transformación de Lorentz son por lo tanto:

$$x' = \gamma(x - vt); \quad t' = \gamma(t - xv/c^2) \qquad (S \rightarrow S') \qquad [10.27]$$

$$x = \gamma(x' + vt'); \quad t = \gamma(t' + x'v/c^2) \qquad (S' \rightarrow S) \qquad [10.28]$$

Cuando $v << c$, las transformaciones de Lorentz se reducen a las galileanas. Haciendo $v/c \simeq 0$ se obtiene $x' = x - vt$ y $t = t'$.

Medidas de longitud y tiempo

El factor, $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ que aparece en las ecuaciones de Lorentz debido a la constancia de la velocidad de la luz, tiene una consecuencia importante: cuando observadores en movimiento relativo miden longitudes de cuerpos o intervalos de tiempo entre dos eventos, pueden no obtener los mismos resultados.

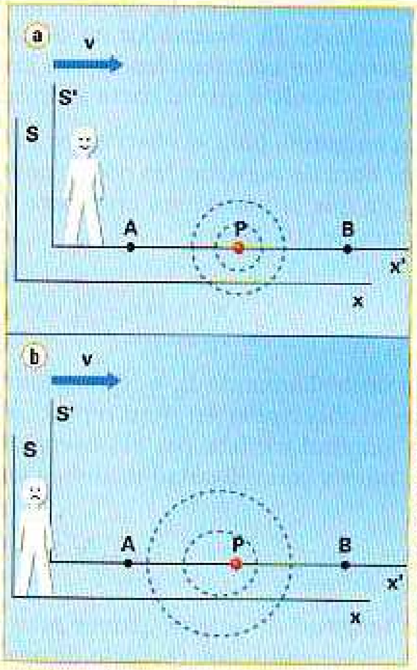
Las diferencias de coordenadas o de tiempos entre dos sucesos, medidos por dos observadores, uno en S y otro en S', se relacionan a partir de las ecuaciones de Lorentz, escribiéndolas como:

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t); \quad \Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x/c^2) \qquad (S \rightarrow S') \qquad [10.29]$$

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' - v\Delta t'); \quad \Delta t = \gamma(\Delta t' + v\Delta x'/c^2) \qquad (S' \rightarrow S) \qquad [10.30]$$

donde $\Delta x' = x'_2 - x'_1$ y $\Delta t = t'_2 - t'_1$ son las diferencias medidas por el observador en reposo en S', mientras que $\Delta x = x_2 - x_1$ y $\Delta t = t_2 - t_1$, son las medidas por el observador en reposo en S.

No hay un tiempo absoluto



a) Para el observador en reposo en S' la luz que sale de P alcanza simultáneamente A y B. b) Para el observador en S, la luz llega antes al punto A que al B.

Si del punto P sobre el eje x' parten dos pulsos de luz en sentidos opuestos, un observador en S' verá que los puntos A y B, equidistantes de P, son alcanzados por los pulsos de luz en un mismo instante, $t'_A = t'_B$.

Pero estos mismos dos sucesos (llegada de los pulsos a A y B) no serán simultáneos para un observador en el sistema S. En efecto, ya que la velocidad de la luz es la misma en S, el punto A se mueve (con relación a S) al encuentro de la señal que se le ha enviado, mientras que el punto B se aleja de la señal (emitida de P a B): en el sistema S la señal alcanza el punto A antes que el B, $t_A \neq t_B$.

Contracción de la longitud

Supongamos una barra AB en reposo en S' situada a lo largo del eje x' (fig. 10.24). El observador en S que desea medir su longitud deberá registrar las coordenadas de sus extremos, x_A y x_B, simultáneamente, $t_A = t_B$, debido a que la barra se mueve respecto de él.

Sin embargo, para el observador en S', la simultaneidad es irrelevante a la hora de registrar las coordenadas de los extremos de la barra x'_A y x'_B, ya que la barra está en reposo. Aplicando la primera de las ecuaciones de [10.29]:

$$x'_B - x'_A = \gamma\,(x_B - x_A - v \cdot 0) = \gamma\,(x_B - x_A) \qquad [10.31]$$

Es decir, llamando $L_0 = x'_A - x'_B$ (longitud propia) a la longitud medida por el observador en S' en reposo respecto de la barra, y $L = x_A - x_B$, a la longitud medida por el observador en S respecto del cual la barra se mueve con velocidad v, ambas longitudes se relacionan por:

$$L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2} \qquad [10.32]$$

La longitud del cuerpo parece más corta para el observador que la ve en movimiento, que respecto de otro que está en reposo junto a ella.

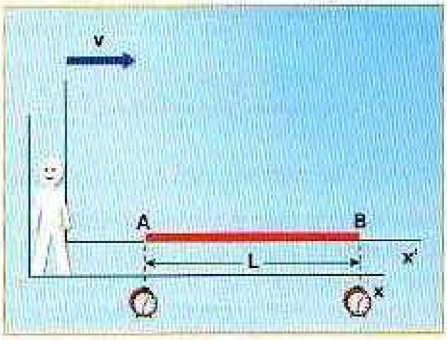


Fig. 10.24. Contracción de una barra en movimiento.

Dilatación del tiempo

Los intervalos de tiempo se miden con un buen reloj, y un buen reloj es un fenómeno periódico. Consideremos relojes en reposo en S' y un intervalo de tiempo $\Delta t'$ medido con ellos, entre dos sucesos que se producen en la misma posición en S', es decir $\Delta x' = 0$.

Los correspondientes intervalos, Δx y Δt, medidos con reglas y relojes en reposo en S, vienen dados por las ecuaciones [10.30]. En particular, el intervalo de tiempo será:

$$\Delta t = \gamma \Delta t' = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad [10.33]$$

Como $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, se tiene entonces que $\Delta t > \Delta t'$. Es decir:

Los procesos parecen más lentos cuando ocurren en un cuerpo (sistema de referencia) que está en movimiento respecto del observador, que cuando suceden estando en reposo respecto de éste.

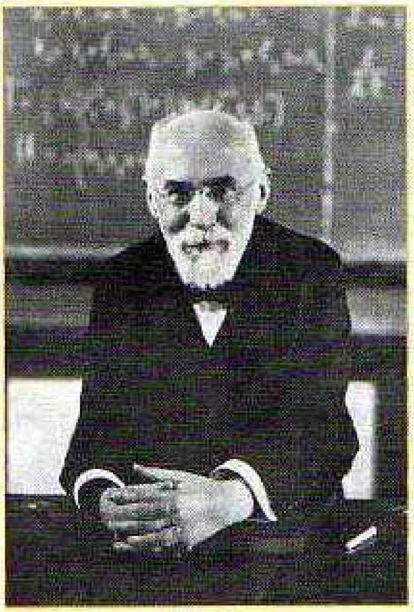
Ejemplos

1 La longitud de una nave espacial es de 100 m cuando se encuentra en reposo respecto de un observador. Si la nave espacial se mueve frente al observador con una velocidad de $0{,}99c$, ¿cuánto vale para él la longitud de la nave espacial?

La longitud de la nave espacial que mide el observador es:

$$L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2} = 100\sqrt{1 - \frac{(0{,}99c)^2}{c^2}} = 14 \text{ m}$$

Contracción de los cuerpos



Hendrik Lorentz (1853-1928).

El físico holandés Hendrik Lorentz y el físico irlandés George Fitzgerald (1852-1901) sugirieron que los cuerpos que se desplazaban por el éter se contraerían y el ritmo de sus relojes disminuiría, de tal forma que todos los observadores medirían la misma velocidad de la luz (Lorentz y Fitzgerald consideraban el éter como una sustancia real). Sin embargo, en un artículo publicado en junio de 1905, Einstein subrayó que la noción de un éter resulta innecesaria.

Momento lineal y energía relativista

Momento lineal

Hemos visto como se cumple el principio de relatividad de Einstein si las transformaciones galileanas son reemplazadas por las transformaciones de Lorentz.

De la misma manera, para poder describir el movimiento de los objetos en el marco de la teoría de la relatividad, debemos modificar la 2.ª ley de Newton, $F = ma$, así como las definiciones clásicas de momento lineal y energía.

Exigiendo que el momento lineal de un sistema aislado (no sometido a fuerzas exteriores) se conserve en cualquier sistema de referencia inercial (principio de relatividad), y que el momento lineal se reduzca al valor clásico, $p = mv$, en el límite de velocidades pequeñas comparadas con la de luz ($v/c \rightarrow 0$), se obtiene la expresión correcta del momento lineal $\vec{p}$:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma m\vec{v} \qquad [10.34]$$

donde v es la velocidad y m es la masa del objeto, es decir, la masa medida cuando está reposo.

Se observa que cuando v es mucho menor que c el denominador tiende a la unidad y se recupera entonces la definición clásica (no relativista) del momento lineal.

Para la resolución de muchos ejercicios y problemas, es útil interpretar la ecuación [10.34] como el producto de la masa relativista, γm, por la velocidad del objeto, lo que conduce a una interpretación muy extendida de la ecuación [10.34], en la que se considera que la masa del objeto aumenta con la velocidad:

$$\text{Masa relativista} = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad [10.35]$$

Relación con la fuerza

La nueva definición del momento lineal va a modificar la relación entre fuerza y aceleración de la mecánica clásica, que es, como ya sabemos:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

En la mecánica relativista, la relación $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ se mantiene, pero con la nueva definición relativista del momento lineal, se llega a la siguiente expresión:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) \qquad [10.36]$$

La ecuación anterior muestra que conforme la velocidad v del objeto aumenta y se aproxima a la velocidad de la luz c, la fuerza necesaria para producir una aceleración aumenta sin límite y tiende a infinito cuando $v \rightarrow c$.

Energía

En mecánica clásica se dedujo la energía cinética de una partícula respecto de un observador: $E_c = mv^2/2$. Usando la definición del momento lineal relativista, se encuentra que la E_c relativista pasa a ser:

$$E_c = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2 \qquad [10.37]$$

Se llama **energía total** la magnitud definida mediante la suma:

$$E = E_c + mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma mc^2 \qquad [10.38]$$

Siendo la magnitud mc^2 conocida como *energía en reposo del cuerpo*, ya que es el valor de E cuando su velocidad es $v = 0$. A cada masa m de un objeto en reposo se le puede asociar una energía E_0, dada por:

$$E_0 = mc^2 \qquad [10.39]$$

Esta ecuación enseña que se puede asociar un cambio de masa, Δm, a cualquier cambio de energía ΔE_0, y viceversa. Debe tenerse en cuenta que la energía de un objeto está formada por las energías en reposo de las partículas que lo constituyen, por la energía cinética interna de éstas y por la energía de sus interacciones mutuas. Es decir, mc^2 no es igual a $\Sigma m_i c^2$ (donde m_i es la masa de cada partícula), por esta razón la masa de un cuerpo no es igual a la suma de las masas de sus partículas (se verá más detenidamente en el tema de Física nuclear) (tabla 3).

Relacionando la energía con el momento lineal, y teniendo en cuenta las ecuaciones [10.34] y [10.38], se obtiene (fig. 10.25):

$$E^2 = p^2c^2 + (mc^2)^2 \qquad [10.40]$$

Se deduce de esta ecuación, que para una partícula de masa nula (como los fotones), la relación entre la energía E y el momento lineal p se reduce a:

$$E = pc \qquad [10.41]$$

Tabla 3

Energía en reposo de algunas partículas (MeV)		
Partícula	**Símbolo**	**Energía**
Fotón	γ	0
Electrón	e	0,511
Protón	p	938,28
Neutrón	n	939,573
Deuterón	^2H	1875,63
Tritio	^3H	2808,41

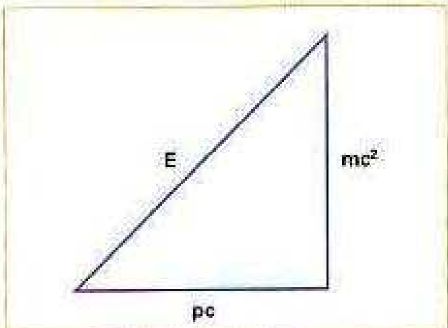


Fig. 10.25. Triángulo que permite recordar la relación entre las energías de una partícula, mediante el teorema de Pitágoras.

EJEMPLOS

1 La masa del deuterio (2,013553 uma) no es igual a la suma de las masas de sus componentes, un protón y un neutrón. Determina esta diferencia de masas y su energía equivalente.

La masa del protón es m_p = 1,007 276 uma y la del neutrón es m_n = 1,008665 uma. Por lo tanto:

$\Delta m = (1{,}007\,276 + 1{,}008\,665) - 2{,}013\,553 = 0{,}002\,388$ u

Por definición, 1 u = $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg:

$\Delta m = 0{,}002\,388 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg $= 3{,}96 \cdot 10^{-30}$ kg

$\Delta E_c = c^2 \Delta m = (3 \cdot 10^8)^2 \cdot 3{,}96 \cdot 10^{-30} = 3{,}57 \cdot 10^{-13}$ J