## 8 El sólido rígido (S.R.)

Un sólido rígido se considera a un conjunto de partículas materiales: $m_1$, ...$m_i$ ....$m_n$ cuyas distancias mutuas permanecen invariables, en las condiciones habituales de trabajo del cuerpo*.* Así por ejemplo, la distancia entre dos partículas cualesquiera como $m_i$ y $m_j$ ; que designamos por $d_{ij}$ ; se mantiene siempre constante, fig.2.11.

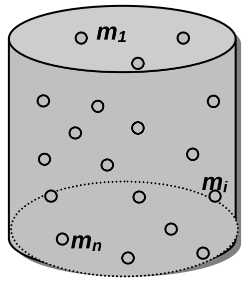



Fig.2.11. Para estudiar el sólido rígido podemos considerarlo constituido por muchos partículas materiales, que pueden numerarse.

En otras ocasiones se considera al sólido como un continuo, pero sin interesarnos por su estructura interna. Entonces, se considera formado por elementos de masa *dm*, sin necesidad de asignarles numeración.

*En el movimiento del sólido rígido* estudiaremos únicamente la traslación, la rotación alrededor de un eje fijo y una combinación de rotación y traslación.

### 8.1 Movimiento de traslación

Un sólido rígido efectúa una traslación, cuando un triedro unido al cuerpo no cambia su orientación en el transcurso del movimiento, con relación a unos ejes fijos con origen en un punto *O,* fig.2.12 y fig.2.13.

**La traslación es rectilínea**, si las trayectorias seguidas por los partículas del S. R. en su movimiento, son líneas rectas. Así sucede con las trayectorias de los puntos *A* y *B* de la fig.2.12, que se representan en el dibujo mediante líneas discontinuas.

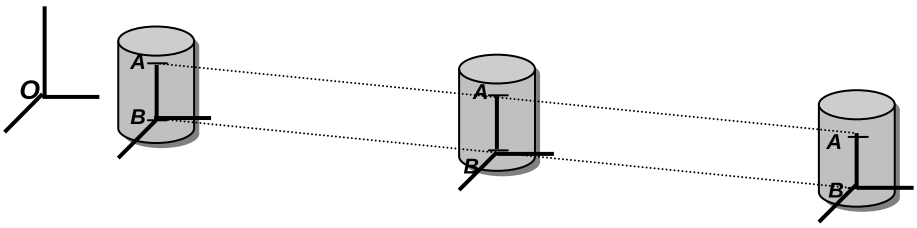



Fig.2.12. Traslación rectilínea

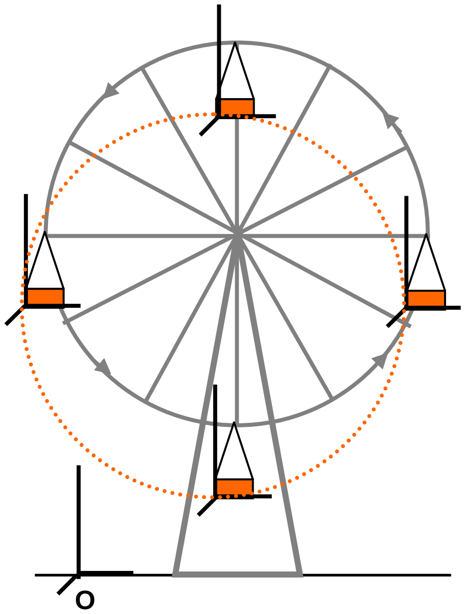



Fig.2.14. Los ejes ligados a las cestas de la noria, tienen un movimiento de traslación respecto de los ejes fijos en **O,** situados en el suelo. Todos los puntos de las cestas al moverse, sufren una traslación curvilínea. Observa la trayectoria de un punto de la cesta, señalada con línea discontinua.

**La traslación es curvilínea,** cuando las trayectorias de las partículas del S.R. son líneas curvas. Observa en la fig.2.13, las trayectorias de *A* y *B*, y entiende que es una traslación, porque el triedro sigue paralelo así mismo, y a la posición inicial. Un ejemplo muy conocido se muestra en la fig.12.14

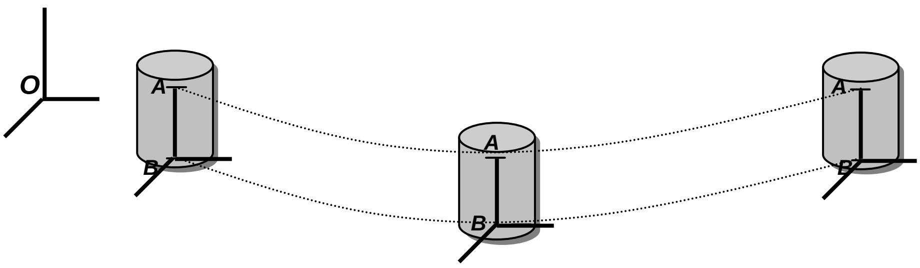
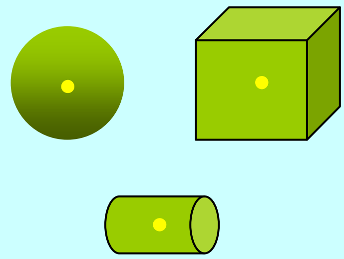



Fig.2.13. Traslación curvilínea

Cuando un sólido rígido efectúa una traslación sea rectilínea o curvilínea, en cada instante los vectores velocidad y aceleración, son los mismos para todas las partículas del sólido.



*En los sólidos regulares, el centro de masas coincide con el centro de simetría del cuerpo .*

## 8.2 Movimiento de rotación alrededor de un eje fijo

Consideremos un sólido rígido y unos ejes fijos en él (*X´, Y´, Z´*). El sólido efectúa una rotación cuando este sistema de ejes, gira con velocidad angular $\vec{\omega}$, alrededor de otros ejes fijos (*X, Y, Z*),. El eje alrededor del cual gira el sólido se llama eje de rotación, siendo *Z = Z´*. Cualquier partícula como la $m_i$ fig.2.14, describe una circunferencia con centro en el punto $O_i$ del eje, pues por definición de sólido rígido la distancia a $O_i$ es constante.

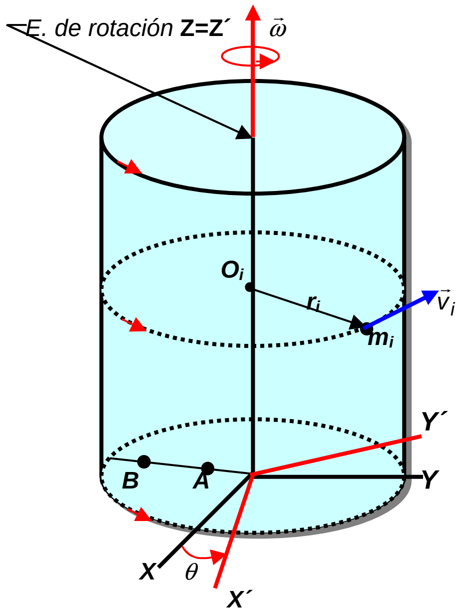



Fig.2.14. Cuando el sólido gira a derechas, observa como los ejes ligados al sólido *(x´, Y´, Z´)* giran alredor de los ejes fijos (*X, Y, Z*). Entonces el vector velocidad angular $\vec{\omega}$ se determina mediante el avance de un sacacorchos que gire en el mismo sentido del sólido, encontrándose además sobre el eje de rotación *Z = Z´*.

La velocidad angular determina la "rapidez" con que sólido rígido da vueltas, si miras los puntos *A* y *B*, que están sobre el mismo radio, deberán dar igual número de vueltas en el mismo tiempo, por permanecer siempre constante su distancia, por lo tanto la velocidad angular $\vec{\omega}$ será la misma para todos los puntos. *Para un sólido rígido en rotación alrededor de un eje, en cada instante, la velocidad angular es igual para todas las partículas del sólido.*

La velocidad $\vec{v}_i$ que lleva cada partícula $m_i$ a lo largo de la circunferencia de radio $r_i$ que describe, se llama velocidad lineal y es distinta para cada partícula del sólido. El módulo de la velocidad lineal de una partícula, es igual a la velocidad angular por el radio de la circunferencia que describe $v_i = \omega \cdot r_i$ En la fig.2.15 se representan las velocidades lineales de dos partículas *C* y *D,* observa que es mayor cuanto más alejada está del eje.

Si la velocidad angular cambia con el tiempo, sobre el sólido actúa una aceleración angular $\vec{\alpha}$, que es un vector en la dirección del eje de rotación, fig.2.15. Se obtiene derivando la velocidad angular respecto del tiempo.

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

La aceleración angular es en cada instante, la misma para todos los puntos del sólido rígido. La aceleración angular está relacionada con la aceleración tangencial -que has estudiado en la unidad anterior, ec.(1.4)- resultando que su módulo, es igual a la aceleración angular $\alpha$ por el radio $r_i$ de la circunferencia que describe la partícula; $a_{t,i} = \alpha \cdot r_i$

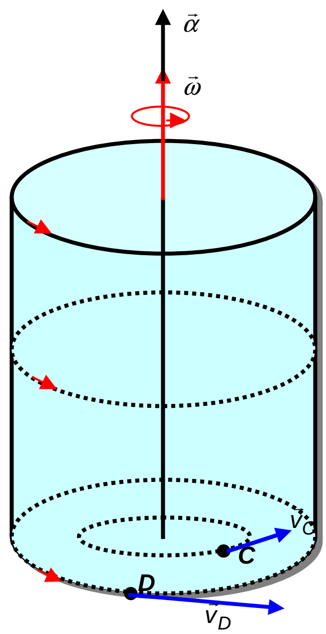



Fig.2.15. Los vectores velocidad angular $\vec{\omega}$ y aceleración angular $\vec{\alpha}$ tienen la dirección del eje de rotación y valen igual para todas las partículas del sólido rígido. En cambio la velocidad lineal varía según la distinta de las partículas al eje de rotación.

**Ejemplo 8.1**

*El cilindro de la fig.2.14 gira alrededor del eje de rotación, que además es su eje de simetría, con una velocidad angular constante de 10 r.p.m. Dos segundos más tarde se mide su velocidad angular y se encuentra que es de 20 r.p.m. Determina: a) La aceleración angular considerando que ha variado uniformemente. b) La velocidad lineal a los 2 s, de dos puntos A y B del sólido que están situados a 0,1 m y a 0,2 m, del eje de rotación. c) La aceleración tangencial de los puntos A y B, ese instante.*

a) $\omega_0 = 10\ r.p.m = 10\,\frac{2\,\pi\ rad}{60\ s} = 0{,}33\,\pi\,\frac{rad}{s}$ ; $\omega = 20\ r.p.m = 20\,\frac{2\pi\ rad}{60\ s} = 0{,}67\,\pi\,\frac{rad}{s}$

La aceleración angular $\alpha$ se calcula mediante el cociente:

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{(0{,}67\,\pi - 0{,}33\,\pi)\,rad/s}{2\ s} = 0{,}17\,\pi\,\frac{rad}{s^2}$$

b) $v_A = \omega \cdot R_A = 0{,}67\pi\,\frac{rad}{s}\,0{,}1\,m = 0{,}21\,\frac{m}{s}$ ; $v_B = \omega \cdot R_B = 0{,}67\pi\,\frac{rad}{s}\,0{,}2m = 0{,}42\,\frac{m}{s}$

c) $a_{t,A} = \alpha \cdot R_A = 0{,}17\pi\,\frac{rad}{s^2}\,0{,}1m = 0{,}05\,\frac{m}{s^2}$ ; $a_{t,B} = \alpha \cdot R_B = 0{,}17\pi\,\frac{rad}{s^2}\,0{,}2m = 0{,}11\,\frac{m}{s^2}$

## 8.3 Momento angular de un sólido rígido

Analicemos un disco plano que gira alrededor de un eje perpendicular que pasa por su centro, fig.2.16, en cuya dirección se encuentra el vector velocidad angular $\vec{\omega}$. El momento angular de una partícula de masa $m_i$ respecto del punto *O* del eje, es según ec.(1.16).

$$\vec{L}_{O,i} = \vec{r}_i \wedge m_i \, \vec{v}_i$$

Considerando que es un producto vectorial, resulta un vector perpendicular al plano del disco y que tiene por lo tanto la dirección del eje de rotación, siendo su módulo $L_{O,i} = r_i \, m_i \, v_i \, sen\, 90^o = m_i \, r_i \, v_i$. Igualmente sucede con todas las demás partículas del disco.

Para calcular el módulo del momento angular total del disco respecto de *O*, sumaremos todos los módulos de lo momentos angulares de todas sus *n-partículas,* y teniendo en cuenta que $v_i = \omega \cdot r_i$. Resulta:

$$L_O = \sum_{i=1}^{n} L_{O,i} = \sum_{i=1}^{n} m_i \, r_i \, v_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \, r_i \, \omega \, r_i = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i \, r_i^2$$

El sumatorio contiene la suma de la masa de cada partícula por el cuadrado de su distancia al eje, se llama momento de inercia *I* del sólido, (m.d.i).

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i \, r_i^2 \qquad (2.10)$$

La unidad en el S. I. para el momento de inercia es el $kg \cdot m^2$.

Sustituyendo (2.10) en la ecuación anterior resulta: $L_O = I \cdot \omega$

Cuando el vector momento angular $\vec{L}_O$ sea paralelo al vector $\vec{\omega}$, entonces el eje se llama, “eje principal de inercia” y en los sólidos de geometría regular, como discos, cilindros, esferas, coincide con sus ejes de simetría. Para rotaciones alrededor de ejes principales resulta la ecuación vectorial.

$$\vec{L}_o = I \cdot \vec{\omega} \qquad (2.11)$$

Siendo *I* el momento de inercia respecto del eje, que se puede determinar experimentalmente, o mediante el cálculo para cuerpos de geometría regular. Aunque el desarrollo se ha efectuado por sencillez para un disco, el resultado es general para cualquier figura geométrica que gire alrededor de un eje principal de inercia, (únicos casos que aquí vamos a tratar).

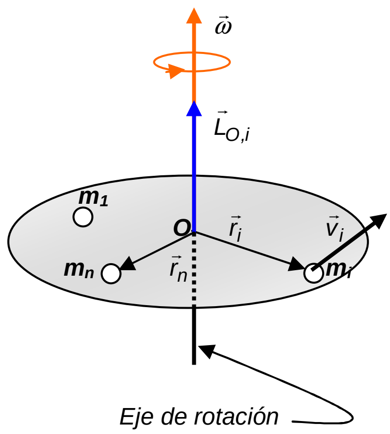



Fig.2.16. Están representadas solamente algunas de las *n-partículas* del sólido rígido. Observa como el momento angular $\vec{L}_{O,i}$; es paralelo al vector velocidad angular $\vec{\omega}$.

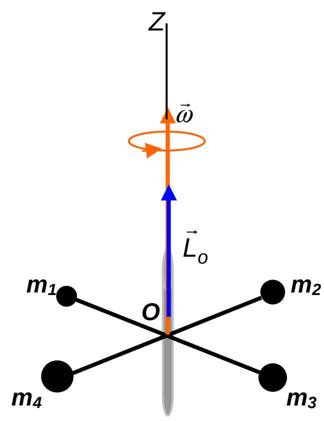



Fig.2.17 Sistema de cuatro partículas situadas a distancias equidistantes del eje, que giran alrededor del mismo con velocidad angular $\vec{\omega}$. Los vectores $\vec{\omega}$ y $\vec{L}_o$ son paralelos al eje *Z,* donde está definido el vector unitario $\vec{k}$.

**Ejemplo 8.2**

*Determina el (m.d.i) del sistema de 4 cuerpos de la fig.2.17, de masas $m_1$ = 1 kg; $m_2$= 2 kg; $m_3$ = 3 kg; $m_4$ = 4 kg estando todas situadas a 2 m del eje, fig.2.17. Si gira alrededor del eje con $\omega$ = 2 rad/s ¿cuánto vale el momento angular?.*

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i \, r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + m_4 r_4^2 = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^2$$

$$I = 40 \; kg \cdot m^2$$

$$L_o = I \cdot \omega = 40 \; kg \cdot m^2 \cdot 2 \; rad / s = 80 \; kg \cdot m^2 / s \; ; \qquad \vec{L}_o = 80 \, \vec{k}$$

## 8.4 Cálculo del momento de inercia de un sólido

Para la determinación matemática del (m.d.i) se considera al sólido como un medio continuo formado por elementos de masa *dm,* tomando una distribución geométrica formada por puntos que se encuentran a la misma distancia del eje de rotación.

Para una distribución continua la expresión del (m.d.i); ec.(2.10) debe ser reemplazada por otra ecuación. En ésta el sumatorio se sustituye por una integral, el vector de posición de cada partícula por la variable $r$ y la masa de cada partícula por $dm$. Resulta:

$$I=\int r^2\cdot dm \qquad (2.12)$$

Como ejemplo de aplicación se va a determinar el momento de inercia de un cilindro macizo de masa $m$ y radio $R$, respecto de un eje principal de inercia paralelo a la generatriz y que pasa por su centro de masas (c.d.m), fig.2.18.

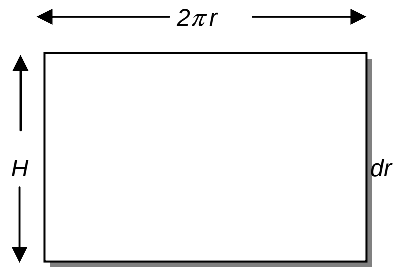



Fig.2.19 El cilindro elemental extraído y desplegado, tiene de espesor $dr$, altura $H$ y longitud $2\pi r$. Su volumen es el producto de las tres aristas, por lo tanto resulta: $dV = H\cdot 2\pi r\cdot dr$

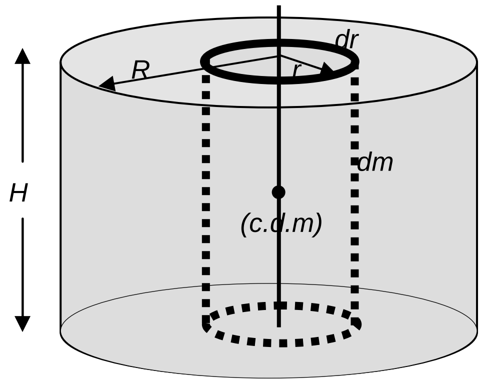



Fig.2.18 Determinación del momento de inercia de un cilindro macizo.

Se toma dentro del cilindro cuya densidad cúbica en $\rho$, un cilindro de igual altura $H$, de radio $r$, y espesor $dr$. Observa que todos los puntos del cilindro señalado en línea discontinua, están a la misma distancia del eje principal.

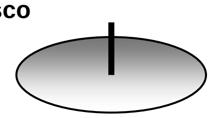
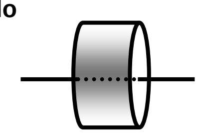
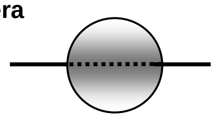
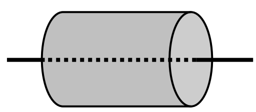
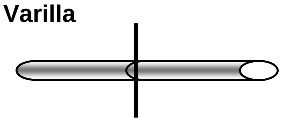
La masa del cilindro interior, es el producto de la densidad $\rho$ por el valor del volumen elemental $dV$. Resulta $dm = \rho\cdot dV$ y para calcular $dV$ vamos a imaginar que lo extraemos y lo cortamos a lo largo de la generatriz $H$, desplegándolo como una alfombra, fig.2.19. Entonces multiplicando las tres aristas resulta, $dV = H\cdot 2\pi r\cdot dr$. Sustituyendo en la ec.(2.12) que lo que en realidad hace, es sumar todos los cilindros elementales comprendidos entre el eje $r = 0$ y la superficie exterior $r = R$, resulta:

$$I=\int r^2\cdot dm=\int_0^R 2\pi H\rho\cdot r^3\,dr=2\pi H\rho\int_0^R r^3\,dr=2\pi H\rho\left(\frac{r^4}{4}\right)_o^R=\frac{1}{2}\pi R^2 H\rho R^2$$

Donde: $\pi R^2 H = Volumen = V$ ; y el volumen por la densidad es la masa $m$.

Resulta finalmente para el momento de inercia del cilindro respecto del eje principal de inercia que pasa por su (c.d.m) paralelo a la generatriz.

$$I=\frac{1}{2}mR^2$$

| **Tabla de (m.d.i) respecto de ejes perpendiculares que pasan por el centro de masas.** | |
|---|---|
| **Disco**  | $\frac{1}{2}mR^2$ |
| **Anillo**  | $mR^2$ |
| **Esfera**  | $\frac{2}{5}mR^2$ |
| **Cilindro**  | $\frac{1}{2}mR^2$ |
| **Varilla**  | $\frac{1}{12}ml^2$ |

### 8.5 Radio de giro

Cuando en las aplicaciones se hace uso del momento de inercia de un cuerpo, muchas veces resulta conveniente considerar toda la masa concentrada idealmente en un punto. A la distancia desde ese punto al eje se llama radio de giro y resulta especialmente útil para cuerpos irregulares ya que no se dispone de fórmulas sencillas para calcular el (m.d.i).

Consideremos un sólido cuyo (m.d.i) respecto de un eje es *I,* suponiendo que toda la masa estuviera concentrada en un punto, tal que el momento de inercia respecto del mismo eje sigue siendo *I,* a la distancia del punto al eje se llama radio de giro *k.* Sustituyendo en la ec.(2.10) teniendo en cuenta que ahora $r_i$ es el mismo para todas las partículas resulta:

$$I=\sum_{i=1}^{n} m_i\, r_i^2=\sum_{i=1}^{n} m_i\, k^2=\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)k^2=m\,k^2\,; \qquad I=m\,k^2 \qquad (2.13)$$

Observando la ec.(2.13), el sólido rígido cuyo radio de giro *k* es conocido, puede ser asimilado a un anillo que tiene igual masa y de radio $r = k$.

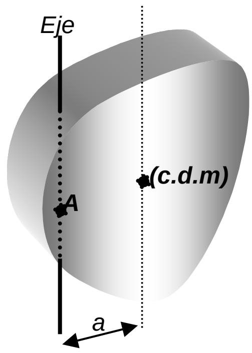



Fig.2.20 El momento de inercia respecto de un eje que pase por un punto *A,* se puede determinar fácilmente si se conoce el (m.d.i) respecto de un eje paralelo que cruza por el centro de masas (c.d.m).

**Ejemplo 8.3**

*Determina el radio de giro de una esfera de masa m, y radio R.*

Igualando la ec.(2.13), al momento de inercia de una esfera, ver la tabla de (m.d.i).

$$m\,k^2=\frac{2}{5}m\,R^2\,; \qquad k=R\sqrt{\frac{2}{5}}$$

**Ejemplo 8.4**

*Un sólido irregular tiene una masa de 60 kg y un radio de giro de 0,10 m. Calcula su momento de inercia.*

$$I=m\,k^2=60\,kg\cdot(0{,}10\,m)^2=0{,}60\,kg\cdot m^2$$

### 8.6 Teorema de Steiner o de los ejes paralelos

En ocasiones resulta necesario calcular el momento de inercia de un sólido respecto de un eje que no pasa por el centro de masas. En estos casos no es necesario realizar un nuevo cálculo del (m.d.i) respecto del nuevo eje, basta aplicar el teorema del eje paralelo o de Steiner.

Supongamos que es quiere calcular el momento de inercia del cuerpo de la fig.2.20, respecto del eje que pasa por el punto *A.* Se traza un eje paralelo que pase por el centro de masas y el teorema de Steiner prueba, que el momento de inercia $I_A$ respecto del eje que pasa por el punto *A;* es la suma del momento de inercia respecto del eje paralelo que pasa por el (c.d.m) $I_{cm}$ más el producto de la masa *m* del sólido, por el cuadrado de la distancia "*a*" entre los dos ejes.

$$I_A=I_{cm}+m\,a^2 \qquad (2.14)$$

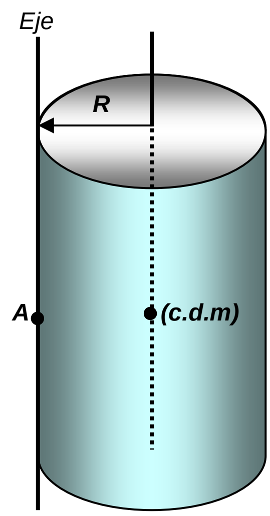



Fig.2.21 Momento de inercia de un cilindro de masa *m,* respecto de un eje tangente a su generatriz que pasa por el punto *A.*

Verifica que si el cuerpo es un cilindro fig.2.21 y el eje es tangente a su generatriz, el momento de inercia vale: $I_A=\frac{1}{2}mR^2+mR^2=\frac{3}{2}mR^2$.

## 9 Efecto sobre un sólido del momento de una fuerza

Cuando un sólido rígido tiene libertad de girar alrededor de un eje, es un hecho experimental que el momento de la fuerza aplicada produce rotación.

Si consideramos un eje que pasa por el centro de masas, punto *O* de la fig.2.22, y se aplica una fuerza al sólido, el momento que produce es.

$$\vec{M}_O = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

Recordemos que para un sistema de partículas, se cumplía entre el momento angular $\vec{L}_O$ y el momento de las fuerzas exteriores $\vec{M}_O$ la ec.(2.7) $\vec{M}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$. Por otra parte, cuando el sólido gira alrededor de un eje principal de inercia, se verifica la ec.(2.11), $\vec{L}_O = I\ \vec{\omega}$. Sustituyéndola en la anterior y derivando con relación al tiempo.

$$\vec{M}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt}\left(I\ \vec{\omega}\right) = I \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\ \vec{\alpha}$$

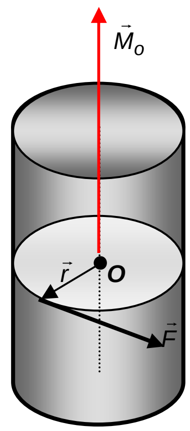



Fig.2.22. El momento de la fuerza $\vec{F}$ aplicada al sólido rígido, produce un momento $\vec{M}_O$, cuyo efecto dinámico es una aceleración angular.

Pues *I* es constante y como ya hemos visto, la derivada de la velocidad angular respecto del tiempo, es la aceleración angular $\vec{\alpha}$. Resumiendo:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \wedge \vec{F} = I\ \vec{\alpha}$$

*El efecto dinámico del momento de la fuerza aplicada al sólido rígido, es producir una aceleración angular del mismo.*

**Ejemplo 9.1**

*El cilindro de la fig.2.23, tiene una masa de $m_C$ = 50 kg; y un radio de R = 0,10 m. La cuerda va enrrollada a su generatriz y de su extremo libre cuelga una masa m = 2 kg. Determina la aceleración de traslación de la masa m, la aceleración angular del cilindro, y la tensión de la cuerda. Tómese g = 10 m/s$^2$.*

La masa *m* se traslada y hay que aplicarle la ecuación (1.9) de la Dinámica de la traslación. Convenimos tomar como sentido positivo el del movimiento, es decir hacia abajo. De acuerdo con este criterio resulta: $P - T = m \cdot a$

El cilindro gira por lo que vamos a tomar momentos respecto de un punto del eje de rotación, aplicando la ecuación $\vec{M}_O = \vec{R} \wedge \vec{F} = I\ \vec{\alpha}$. Observa en la fig.2.23 que solo la tensión *T* da momento, así que el módulo de éste vale: $R\,T\ sen\ 90^o = I\,\alpha$.

La cuerda no desliza sobre el cilindro, por lo que el módulo de la aceleración de la masa *m,* vale en lo mismo que la aceleración tangencial, de los puntos de la periferia del cilindro: $a = \alpha \cdot R$

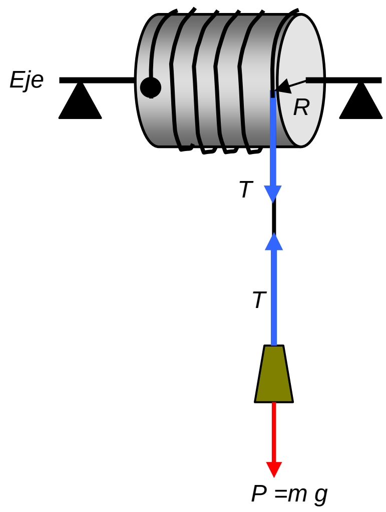



Fig.2.23 La tensión *T* de la cuerda aplicada a la periferia del cilindro de radio *R,* produce un momento respecto de los puntos del eje que vale *R · T.*

Escribiendo estas ecuaciones en forma de sistema:

$$\left.\begin{array}{l} P - T = m \cdot a \\ R\,T\ sen\ 90^o = I\,\alpha \\ a = \alpha \cdot R \end{array}\right\} \text{Recordando que } I = \frac{1}{2} m_C\, R^2 \text{; resulta: } \left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{mg}{m + m_C/2} \\ \alpha = \dfrac{mg}{\left(m + m_C/2\right)R} \\ T = m\left(g - \dfrac{mg}{m + m_C/2}\right) \end{array}\right.$$

Sustituyendo datos: $a$ = 0,73 m/s$^2$; $\alpha$ = 7,3 rad/s$^2$; T = 18,2 N

## 10 Principios de la Dinámica de la rotación

***Primero.-*** Un sólido en rotación no modifica su velocidad angular mientras que no actúe sobre él, el momento de una fuerza. En virtud de esta propiedad seguirá girando continuamente con movimiento circular uniforme.

***Segundo.-*** Al aplicar a un sólido un momento le suministra una aceleración angular. El coeficiente de proporcionalidad entre el momento $\vec{M}_o$ aplicado y la aceleración angular $\vec{\alpha}$ adquirida, es el momento de inercia *I*. Si sobre el sólido actúan varios momentos la ecuación fundamental de la Dinámica de la rotación se expresa.

$$\sum \vec{M}_o = I\,\vec{\alpha} \qquad (2.15)$$

Físicamente, el momento de inercia representa una medida de la oposición del cuerpo a adquirir una aceleración angular. Depende de la forma del cuerpo, (obsérvese la tabla de momentos de inercia), y aún para un mismo cuerpo, varía al cambiar la distribución de la masa respecto del eje. Si cambia el eje, se modifica el momento de inercia del sólido, fig.2.24.

***Tercero.-*** Cuando a un cuerpo se le aplica un momento, existe otro momento igual y de sentido contrario, aplicado en el cuerpo que ejerció la acción. Si dejas suelto un taladro sobre la mesa y haces pasar la corriente, el momento que ejerce el motor sobre su eje, origina un momento de reacción de sentido contrario sobre el conjunto de la máquina, que se pone a girar al revés.

Cada uno de los sumandos, es la energía cinética de rotación del sólido rígido.

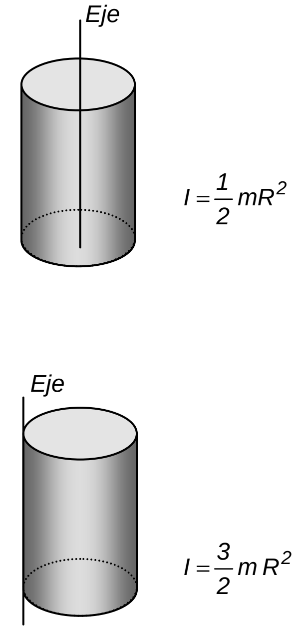



Fig.2.24. Al modificarse la distribución de la masa del sólido respecto del eje, al cambiar de eje, se modifica el momento de inercia del cuerpo.

## 11 Trabajo en la rotación. Energía cinética de rotación

El trabajo es el resultado de una fuerza que aplicada al sólido desplaza su punto de aplicación. Supongamos una fuerza $\vec{F}$ que actúa tangencialmente a la trayectoria que describe una partícula del sólido, fig.2.25 y que por su acción el cuerpo gira un ángulo $d\theta$. El trabajo elemental es $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ; siendo $d\vec{r}$ un desplazamiento, cuyo módulo es $dr = r\ d\theta$. El trabajo efectuado por el momento entre dos posiciones angulares $\theta_0$ y $\theta$, es la suma de los trabajos elementales que se determina mediante una integral

$$W = \int_{\theta_o}^{\theta} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\theta_o}^{\theta} F \cdot dr \cos 0^o = \int_{\theta_o}^{\theta} F\, r\, d\theta = \int_{\theta_o}^{\theta} M \cdot d\theta$$

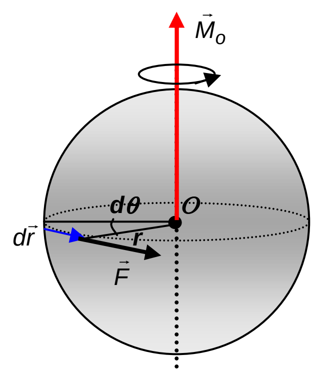
Si el momento es constante sale de la integral y resulta $W = M \cdot (\theta - \theta_o)$

El trabajo realizado por el momento aplicado, es una energía, que pasa al cuerpo en forma de energía cinética llamada de rotación, modificando la velocidad angular del sólido desde $\omega_0$ a $\omega$. Operando en la integral:

$$W = \int_{\theta_o}^{\theta} M \cdot d\theta = \int_{\theta_o}^{\theta} I\,\alpha \cdot d\theta = \int_{\theta_o}^{\theta} I \frac{d\omega}{dt} \cdot d\theta = \int_{\omega_o}^{\omega} I \frac{d\theta}{dt} d\omega = \int_{\omega_o}^{\omega} I\,\omega\, d\omega$$

$$W = \frac{1}{2} I (\omega^2 - \omega_o^2) = \frac{1}{2} I\,\omega^2 - \frac{1}{2} I\,\omega_o^2 = E_{CR} - E_{CR,0} = \Delta E_{CR}$$

$$E_{CR} = \frac{1}{2} I\,\omega^2 \qquad (2.16)$$




Fir.2.25 El trabajo de rotación efectuado por el momento de la fuerza aplicada, se invierte en hacer girar el cuerpo, incrementando su velocidad angular y su energía cinética de rotación.

**Ejemplo 11.1**

*La pesa de masa m = 2 kg, suspendida del cilindro del* ***ejemplo 9.2,*** *desciende una distancia de 4 m, fig.2.26. Calcula el trabajo realizado por lel momento de la tensión de la cuerda sobre el cilindro, su energía cinética de rotación y la velocidad angular cuando ha descendido la altura señalada. Radio del cilindro R = 0,1 m;* $m_c = 50$ *kg*

Tomamos como dato la tensión de la cuerda *T = 18,2 N,* que al ser una fuerza constante proporciona un momento constante, por serlo también el radio del cilindro.

$$M = R\ T\ sen\,90^o = 0{,}1m \cdot 18{,}2\,N = 1{,}82\,N \cdot m$$

Para calcular el ángulo $\theta$ radianes, que ha girado el cilindro, recordemos que la longitud del arco es igual al ángulo en radianes por el radio, $s = \theta \cdot R$ y la longitud del arco *s* es igual a la longitud de cuerda que ha descendido $\theta = \dfrac{4\,m}{0{,}1\,m} = 40\,rad$

El trabajo en la rotación: $W = M \cdot (\theta - \theta_o) = 1{,}82\,N\ m \cdot 40\,rad = 72{,}8\,J$

Aplicando la ecuación de la energía para la rotación alrededor de un eje fijo.

$$W = E_{CR} - E_{CR,0} = E_{CR} - 0\ ; \qquad E_{CR} = W = 72{,}8\,J$$

La velocidad angular: $\omega = \sqrt{\dfrac{2\,E_{CR}}{I}} = \sqrt{\dfrac{2\,E_{CR}}{\frac{1}{2}\,m\,R^2}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 2 \cdot 72{,}8\,J}{50\,kg \cdot (0{,}1\,m)^2}} = 24{,}1\,\dfrac{rad}{s}$

$$I_2 \cdot \vec{\omega}(t_2) = I_1 \cdot \vec{\omega}(t_1)$$

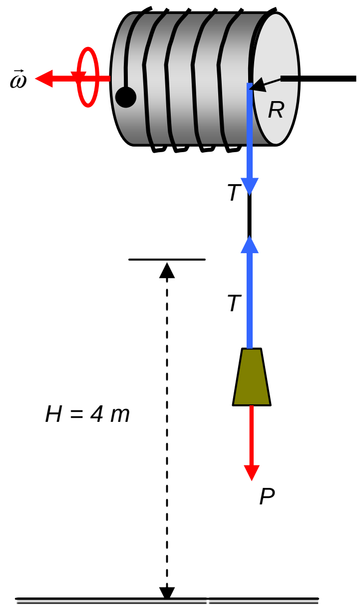



Fig.2.26. El cilindro se pone en rotación debido al trabajo realizado por el momento de la tensión *T* aplicada.

## 12 Impulso angular y su relación con el momento angular

Si a un sólido que puede girar alrededor de un eje, se le aplica un momento $\vec{M}_o$ durante un tiempo elemental *dt,* éste le proporciona un impulso angular, definido como el producto del momento por el tiempo que actúa: $\vec{M}_o\,dt$ . Si el momento actúa durante un intervalo de tiempo *($t_1$, $t_2$),* el impulso angular es la suma de los impulsos elementales, que se determina mediante una integral. Sustituyendo después la ec.(2.7), en función del momento angular:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_o\,dt = \int_{t_1}^{t_2} d\vec{L}_o = \vec{L}_o(t_2) - \vec{L}_o(t_1) = \Delta\vec{L}_o \qquad (2.17)$$

*El impulso angular se invierte en variar el momento angular del sólido*.

### 12.1 Conservación del momento angular

Si sobre el sólido no actúa ningún momento debido a fuerzas exteriores, resulta que $\vec{M}_o = 0$ ; y la ec.(2.17) nos dice que el momento angular del sólido permanece constante, entonces:

$$\vec{L}_o(t_2) = \vec{L}_o(t_1) = Cte. \qquad (2.18)$$

Cuando se trate de un mecanismo que permita variar la distribución de la masa, como en la fig.2.27, llamado regulador centrífugo, entonces si $\vec{M}_o = 0$ , la conservación del momento angular explica como al variar el (m.d.i), cambia también la velocidad angular del sistema. En efecto de ec.(2.11).

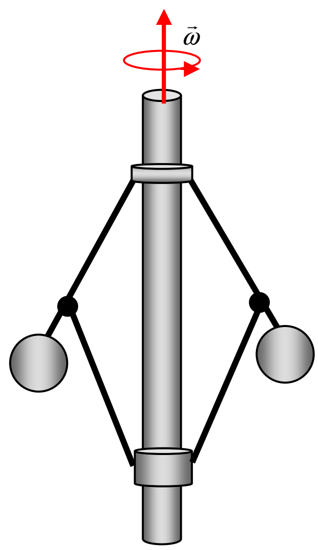



Fig.2.27 Si no actuando momentos exteriores, por alguna causa interna las bolas se separan algo más del eje, entonces aumenta el (m.d.i) del sistema y la conservación del momento angular hace que disminuya la velocidad angular $\vec{\omega}$, con lo que decrece la fuerza centrífuga sobre las bolas y éstas regresan a la primera posición. Una respuesta similar se produce cuando las bolas se aproximan al eje, pero ahora en sentido contrario.

**Ejemplo 12.1**

*Para experimentar con la conservación del momento angular, un estudiante se sienta en un taburete de piano, sosteniendo una pesa de 10 kg en cada mano, a una distancia de 85 cm del eje de rotación. Cuando gira con una $\omega_1$ = 2 rad/s acerca las pesas a 20 cm del eje. Calcula la nueva velocidad angular, sabiendo que el momento de inercia del estudiante y del taburete es $I_E$ = 5 kg.m$^2$.*

Al acercar los brazos las fuerzas que aplica son interiores al sistema y no modifican el momento angular total del mismo, consecuentemente éste se conserva. El momento angular total *L,* es la suma del correspondiente al estudiante y al taburete $L_E$, más el de las pesas $L_P$, que vale igual en la situación inicial y final: $L_E + L_P = L'_E + L'_P$. De ec.(2.11) resulta:

$$(I_E + I_P)\,\omega_1 = (I_E + I'_P)\,\omega_2\,; \qquad \left(I_E + 2\cdot m_P\, r_1^2\right)\omega_1 = \left(I_E + 2\cdot m_P\, r_2^2\right)\omega_2$$

$$\omega_2 = \frac{\left(I_E + 2\cdot m_P\, r_1^2\right)\omega_1}{I_E + 2\cdot m_P\, r_2^2} = \frac{\left(5 + 2\cdot 10\cdot 0{,}85^2\right)2\ \ rad/s}{5 + 2\cdot 10\cdot 0{,}20^2} = 6{,}7\ \frac{rad}{s}$$

## 13 Rotación alrededor de un eje móvil. Rodadura

Hasta ahora hemos analizado la rotación de un sólido rígido alrededor de un eje fijo, sin embargo, ¿qué sucede cuando el eje de rotación también se está moviendo?. Analizaremos únicamente el movimiento plano, en el que todas las partículas del cuerpo se desplazan en planos paralelos a uno fijo. De este modo estudiando el movimiento del plano que contiene al centro de masas conoceremos el comportamiento del sólido.

Consideremos una rueda que inicialmente desliza sobre una superficie lisa, fig.2.28, entonces todos sus puntos se trasladan con la misma velocidad y aceleración. Las representaremos por la del (c.d.m.) en *O.*

Si la rueda de radio *R* se mueve ahora por una superficie rugosa, actúa la fuerza de rozamiento y la rueda además de trasladarse empieza a girar con velocidad angular $\vec{\omega}$, alrededor del eje que pasa por el (c.d.m) en *O,* el que a su vez se desplaza con la velocidad de traslación $\vec{v}_O$. La velocidad $\vec{v}_P$ de un punto *P*, es la suma de la de traslación, más la debida a la rotación.

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{traslación} + \vec{v}_{rotación} = \vec{v}_O + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OP} = v_O\,\vec{i} - \omega R\,\vec{i} = (v_O - \omega R)\,\vec{i} \qquad (2.19)$$

Observa en la fig.2.29 que $\vec{v}_O = v_O\,\vec{i}$ y que $\overrightarrow{OP} = \vec{R}$ es el radio. La velocidad debida a la rotación $\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OP} = -\omega R\,\vec{i}$ ; tiene sentido contrario a la del c.d.m, $\vec{v}_O$

Mientras que la velocidad del punto *P* de la rueda en contacto con el suelo sea distinta de cero, hay deslizamiento. Sin embargo, cuando suceda que la velocidad de este punto sea nula, $\vec{v}_P = 0$ , entonces se produce la rodadura, fig.2.30. *En la rodadura, en todo instante, el punto de la rueda en contacto con el suelo tiene velocidad nula,* de la ec.(2.19) se deduce:

$$\vec{v}_P = (v_O - \omega R)\,\vec{i} = 0\,; \qquad v_O = \omega\cdot R \qquad (2.20)$$

*En la rodadura, la velocidad del (c.d.m) es igual a la angular por el radio.* La velocidad de cualquier punto del sólido, se puede calcular en cada instante, como si efectuará una rotación pura de velocidad angular $\vec{\omega}$, alrededor del punto *P.*

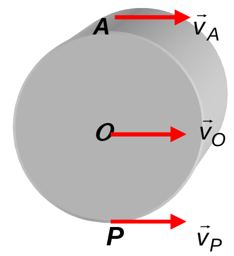



Fig.2.28 Cuando la rueda desliza todos sus puntos se trasladan con igual velocidad, la misma que la del (c.d.m) O.

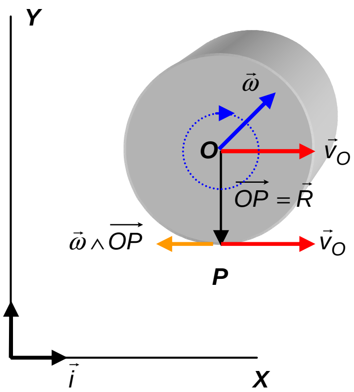



Fig.2.29. Mientras que la velocidad del punto *P* en contacto con el suelo sea distinta de cero, hay deslizamiento. En la figura $\vec{v}_p = \vec{v}_O + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OP} = \vec{v}_O - \omega R\,\vec{i}$

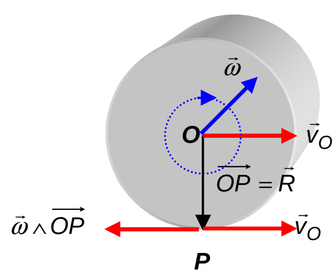



Fig.2.30. Cuando hay rodadura $\vec{v}_O$ y $\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OP}$ son iguales y de sentidos contrarios, siendo la velocidad del punto *P,* nula

Derivando ec.(2.20) respecto del tiempo se obtiene:

$$\frac{dv_O}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R; \qquad a_O = \alpha \cdot R \qquad (2.21)$$

*Cuando hay rodadura, la aceleración de traslación del (c.d.m) es igual a la aceleración angular por el radio.*

El hecho de que la velocidad del punto $P$ sea nula, no implica que lo sea su aceleración, en verdad el punto en contacto con el suelo tiene aceleración tangencial nula, pero la aceleración normal $a_n = \omega^2 R$ es distinta de cero.

**Ejemplo 13.1**

*Una bola esférica de radio 0,1 m, se desplaza por una superficie horizontal, con una velocidad de traslación de 2 m/s. y con una velocidad angular de 5 rad/s. Determina: a) Si la bola rueda o desliza. b) El valor de $\omega$, para que la bola empiece a rodar.*

a) Se comprueba si $v_O - \omega \bullet R = 0$ ; $2\frac{m}{s} - 5\frac{rad}{s} \bullet 0{,}1m = 1{,}5\frac{m}{s} \neq 0$ ; La bola desliza

b) Despejando $\omega$ de la ec.(2.20) resulta: $\omega = \frac{v_O}{R} = \frac{2\,{}^{m}\!/_{s}}{0{,}1m} = 20\frac{rad}{s}$

## 13.1 Condiciones dinámicas de la rodadura

Para que un sólido pueda rodar es absolutamente necesario que exista rozamiento, ahora bien, si la fuerza de rozamiento al deslizamiento era de sentido contrario al vector velocidad del cuerpo, en cambio la fuerza de rozamiento a la rodadura, puede tener el mismo sentido o el sentido contrario que la velocidad del centro de masas, dependiendo de que el móvil acelere o disminuya la velocidad de traslación, fig.2.31

Experimentalmente se verifica que la fuerza de rozamiento a la rodadura es en valor absoluto menor que el coeficiente de rozamiento $\mu$ por la reacción $N$

$$|F_R| < \mu N \qquad (2.22)$$

**Ejemplo 13.2**

*Determina el valor mínimo del coeficiente de rozamiento $\mu$ para que un disco de masa m y radio R, ruede por un plano inclinado de ángulo $\alpha$, al dejarlo libre, fig.2.32.*

Para la traslación del (c.d.m) de aplica la ecuación de Newton (1.9), tomando unos ejes paralelos al plano inclinado con sentido positivo hacia abajo. Si $a_O$ es la aceleración del (c.d.m), se cumple en cada una de éstas dos direcciones:

$$\sum F_x = mg\,sen\,\alpha - F_R = m \cdot a_O\,; \qquad \sum F_y = N - mg\cos\alpha = 0$$

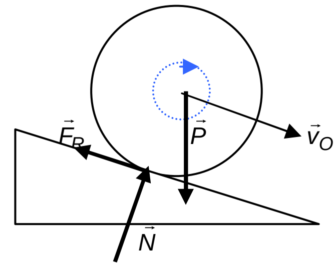
Para la rotación respecto del eje que pasa por el (c.d.m) punto $O$, se aplica ec.(2.15).

$$F_R \cdot R = I \cdot \alpha\,; \qquad \text{con} \qquad a_O = \alpha \cdot R \qquad \text{por rodar}$$

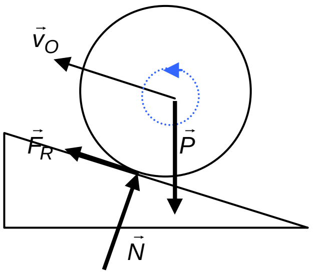
Operando con las cuatro ecuaciones se obtiene: $F_R = \frac{1}{3} mg\,sen\,\alpha$

Llevando $F_R$ y $N$ a la ec.(2.22) resulta: $\frac{1}{3} mg\,sen\,\alpha < \mu \cdot mg\cos\alpha$ ; $\quad \eta > \frac{1}{3}\,tg\,\alpha$

**Observa que no usamos la ecuación $F_R = \mu N$. Para la rodadura no vale**




*a) La rueda desciende por el plano, la $F_R$ tiene sentido contrario a $\vec{v}_O$.*




*b) La rueda asciende por el plano, la $F_R$ tiene el mismo sentido que $\vec{v}_O$.*

Fig.2.31 Según que el movimiento del (c.d.m) sea acelerado en *a);* o retardado en *b).* Cuando el sólido rueda, la fuerza de rozamiento tiene sentido opuesto o el mismo sentido que la velocidad del centro de masa $\vec{v}_O$.

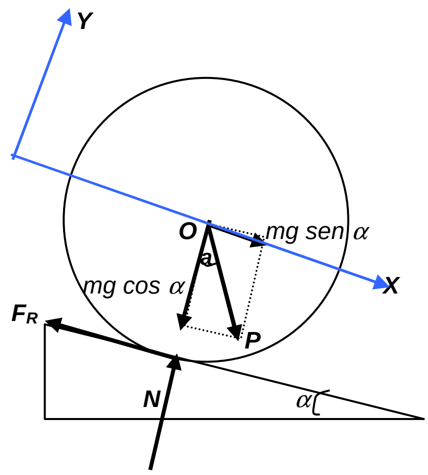


Fig.2.32 Fuerzas y momentos sobre un disco que rueda hacia la parte inferior de un plano inclinado.

### 13.2 Balance de energía en la rodadura

Cuando un cuerpo rueda hemos comprendido que el punto en contacto con el suelo se encuentra en todo instante con velocidad cero, de lo contrario el cuerpo desliza. Entiéndase bien, que un cuerpo puede ir girando y además el punto de contacto con el plano *P* puede tener una cierta velocidad, como en la fig.2.29, entonces no hay rodadura y se habla de deslizamiento.

En el caso de que exista rodadura, la fuerza de rozamiento a la rodadura fig.2.33, actúa sobre un punto que siempre está parado $\vec{v}_P = 0$ y no puede efectuar trabajo. En consecuencia, *la fuerza de rozamiento a la rodadura realiza un trabajo nulo.*

De lo todo anterior se deduce que en una superficie horizontal, una rueda debería avanzar indefinidamente por que no disipa energía, sin embargo en el mundo real vemos que no es así y las ruedas acaban por pararse, ¿qué sucede entonces?. El modelo teórico que hemos estudiado nos dice que solamente un punto de la rueda tiene velocidad nula, sin embargo, las ruedas reales no son rígidas y al deformarse tienen muchos puntos en contacto con el suelo y solamente para uno de ellos la velocidad se anula, el resto deslizan. Cuando hay deslizamiento, la fuerza de rozamiento se opone al movimiento y disipa energía del cuerpo, por lo que éste se ira parando.

Volviendo al modelo teórico que hemos analizado, vamos a determinar la energía cinética de un cuerpo que rueda. Cuando se estudiaron los sistemas de partículas en la sección 6 de esta unidad, relacionábamos la energía cinética del sistema con respecto a ejes inerciales, con la energía respecto del centro de masas, que ahora será de rotación, resultando:

$$E_c = E_{c,cm} + \frac{1}{2} m V_{cm}^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m v_O^2 \qquad (2.23)$$

La energía cinética de un cuerpo que rueda es la suma de la energía cinética de rotación alrededor del eje que pasa por el (c.d.m) más la del centro de masas, considerado como una partícula que tiene toda la masa del cuerpo y que se traslada a la velocidad $v_O$ de éste. Como la rodadura no disipa energía se puede incluir ésta energía cinética en el principio de conservación de la energía mecánica.

**Ejemplo 13.3**

*En la parte superior de un plano inclinado de altura h, se encuentra una esfera de masa m y radio R. Si la superficie del plano es rugosa y la permite rodar desde el principio. Determina la velocidad del (c.d.m) al llegar al final del plano, fig.2.34.*

Aplicando el principio de conservación de la energía mecánica, ec.(1.27), y teniendo en cuenta la ec.(2.23), resulta:

$$E_P(A) + E_c(A) = E_P(B) + E_c(B) \; ; \qquad mgh + 0 = 0 + E_c(B) = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m v_o^2$$

El (m.d.i) de una esfera es $I = \frac{2}{5} m R^2$

$$mgh = \frac{1}{2}\frac{2}{5} m R^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m v_o^2 \; ; \qquad \text{pero por rodar se cumple que} \quad R \cdot \omega = v_o$$

$$mgh = \frac{1}{5} m v_o^2 + \frac{1}{2} m v_o^2 = \frac{7}{10} m v_o^2 \; ; \quad \text{de donde} \quad v_o = \sqrt{\frac{10}{7} gh}$$

Comprueba que si la superficie fuera lisa y bajara deslizando resulta $v_o = \sqrt{2\,g\,h}$

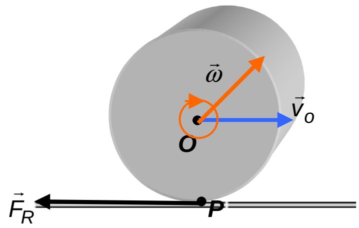



Fig.2.33. En la rodadura, la fuerza de rozamiento no realiza trabajo pues actúa sobre un punto ***P*** que tiene velocidad nula.

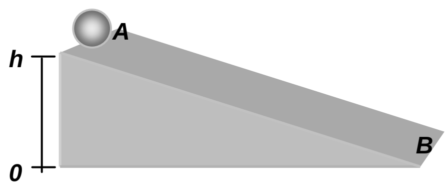



Fig.2.34 En una superficie rugosa, la esfera rueda a lo largo del plano inclinado, conservando constante su energía mecánica.