

#### 4 Propiedades ondulatorias de las partículas

En las interferencias luminosas producidas por dos rendijas paralelas, aparecen unos máximos de intensidad, separados por mínimos (rayas negras). En la fig.12.18, se muestra la imagen de interferencias recogida en una pantalla, y a la derecha un gráfico de la correspondiente intensidad luminosa.

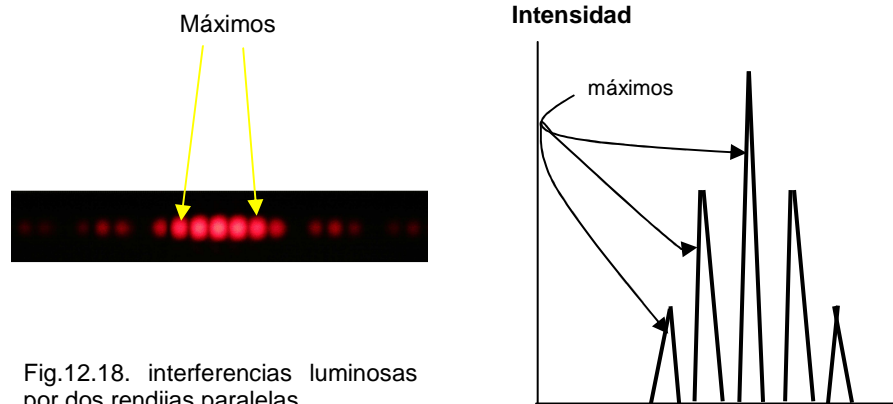


Fig.12.18. interferencias luminosas por dos rendijas paralelas

Si ahora repetimos el experimento de las dos rendijas pero enviando partículas materiales macroscópicas, como por ejemplo granitos de arena, ¿qué pasará?. El diagrama que contiene la intensidad de impactos sobre una pantalla, fig.12.19, será la suma de los impactos debidos a las partículas que pasan por cada una de las rendijas y es una curva en forma de campana centrada en un punto equidistante de las dos rendijas y abierta hacia los lados, debido a la dispersión de las partículas al colisionar con los bordes de las rendijas, presentando una distribución continua.

Si se compara con el diagrama de intensidad de las interferencias de las ondas luminosas producidas por dos rendijas fig.12.18, se observa que no se parece en nada, pues en la fig.12.19, no existen regiones del diagrama sin impactos. *Para partículas clásicas no hay diagrama de interferencias.*

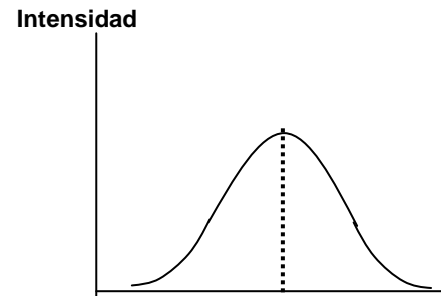


Fig.12.19 Diagrama de intensidad sobre una pantalla, debido a los impactos producidos por partículas, cuyo comportamiento obedece a las leyes de la Física Clásica. La distribución es una curva en forma de campana simétrica respecto de un punto, equidistante de las dos rendijas.

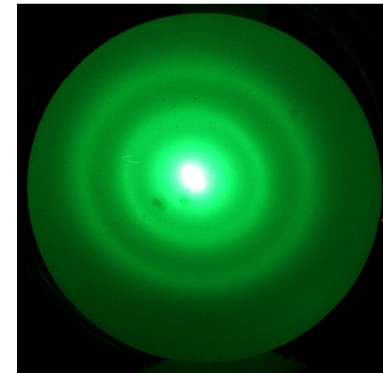


Fig.12.20 Imagen sobre una pantalla fluorescente, de la difracción producida al incidir un haz de electrones sobre un pequeño orificio circular. Observa que es similar a la que producen las ondas luminosas, fig.12.20a, luego los electrones poseen también un comportamiento ondulatorio.

#### 4.1 Experimento a través de un orificio circular con electrones

Hasta ahora hemos visto que los electrones son partículas muy pequeñas, con masa, dotados también de carga eléctrica negativa. Si los enviamos sobre un orificio circular, cabría esperar un comportamiento similar al determinado por partículas clásicas, sin embargo, al realizar el experimento enviando sobre el orificio muchos electrones a la vez, el resultado obtenido fig.12.20, resulta sorprendentemente igual a la imagen de difracción que proporcionan las ondas luminosas, fig.12.20a. Sucede además, que si el experimento se repite mandando los mismos electrones de uno en uno, el diagrama de intensidad no cambia, por lo que no puede ser una consecuencia de la interacción entre los propios electrones del haz.

*De los resultados experimentales tenemos que admitir, que aunque los electrones son partículas, tienen también un comportamiento ondulatorio.*

#### 4.3 Propiedades cuantitativas de los fotones

Planck para explicar la emisión de radiación por un cuerpo negro, propuso la cuantificación de la energía  $E = h \nu$  y Einstein para el efecto fotoeléctrico formuló el carácter corpuscular de la luz, considerando la existencia de los fotones, teoría que fue refrendada experimentalmente por Millikan en 1914 y por Compton 1923, con la dispersión de rayos X por la materia.

Por tanto, la radiación electromagnética no es puramente ondulatoria como muestran los experimentos de interferencias y difracción, ni únicamente corpuscular como muestra el efecto fotoeléctrico y aquellos otros de interacción con la materia. *La radiación tiene una doble naturaleza ondulatoria-corpuscular.*

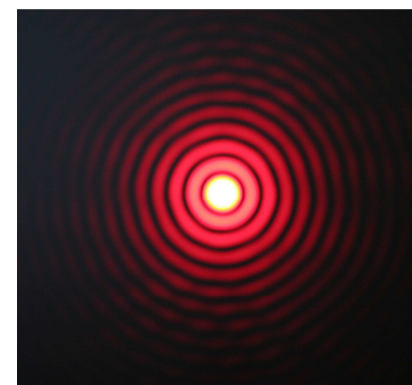


Fig.12.20a. Imagen de difracción de los fotones luminosos, al pasar por un pequeño orificio circular.

Un conjunto de fotones corresponde también con un haz de radiación electromagnética y por tanto viaja a la velocidad de la luz  $c$ , comportándose como partículas relativistas. La energía total de una partícula relativista cuya masa en reposo es  $m_0$  viene dada por la ecuación de Einstein.

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Como los fotones viajan a la velocidad de la luz, es  $v = c$  y el denominador de la ecuación se hace cero, lo que implicaría para el fotón una energía infinita, sin embargo, sabemos que la energía de un fotón toma el valor finito  $E = h \nu$ . La solución de esta paradoja solo se alcanza si el numerador de la ecuación también es cero, es decir, si el fotón tiene una masa en reposo nula  $m_0 = 0$ .

Resulta ahora una indeterminación del tipo  $0/0$  que puede tomar valores reales finitos, incluyendo  $E = h \nu$ . La conclusión, es que un fotón tiene en reposo una masa nula, sin embargo una vez emitido tiene una cierta masa relativista  $m$ .

Puesto que un fotón tiene una masa relativista  $m$ , podemos asignarle una energía y un momento lineal. La energía total la da la ecuación de Einstein  $E = m c^2$  y el momento lineal es  $p = m c$ . Que puede expresarse en función de magnitudes ondulatorias como la longitud de onda  $\lambda$  o la frecuencia  $\nu$ . En efecto:

$$p = m c = m c \frac{c}{c} = \frac{m c^2}{c} = \frac{E}{c}$$

Utilizando la ecuación de la energía total en función de la frecuencia  $E = h \nu$  y recordando que  $\lambda \cdot \nu = c$ , resulta:

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h \nu}{c} = h \cdot \frac{\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

El momento lineal de un fotón de radiación electromagnética, es igual a la constante de Planck  $h$ , dividido por la longitud de onda de la radiación  $\lambda$ .

El fotón se puede considerar como una partícula, cuyo movimiento está guiado por una onda electromagnética asociada. Observando un diagrama de difracción fig.12.20a, se pueden establecer aquellas regiones donde existe mayor o menor probabilidad, de encontrar el fotón en su vecindad. Allí donde la intensidad es alta, la probabilidad es mayor que en otro lugar donde la intensidad es baja. Señalamos que la ubicación exacta donde llegará un fotón no se predice, lo que se quiere indicar es que es muy probable detectar el fotón, en una zona cercana a donde existe la máxima intensidad en el diagrama de difracción.

### Ejemplo 4.3

Un fotón de rayos X tiene una longitud de onda de  $0,5 \cdot 10^{-9}$  m. Determina su frecuencia, su energía y su momento lineal y su masa relativista.

La frecuencia:  $\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{300.000 \cdot 1000 \text{ m/s}}{0,5 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 6 \cdot 10^{17} \text{ Hz}$

La energía:

$$E = h \cdot \nu = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot 6 \cdot 10^{17} \text{ Hz} = 3,98 \cdot 10^{-16} \text{ J} = \frac{3,98 \cdot 10^{-16}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 2,486 \text{ keV}$$

El momento lineal:  $p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{0,5 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 1,3 \cdot 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$

La masa relativista es:  $m = \frac{E}{c^2} = \frac{3,98 \cdot 10^{-16} \text{ J}}{(3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2} = 4,42 \cdot 10^{-36} \text{ kg}$



Louis Victor de Broglie físico francés (1892-1987). Estudió en la Universidad de París donde fue nombrado profesor de Física Teórica en 1928. Por su propuesta sobre la naturaleza ondulatoria de los electrones en 1924, una vez que fue confirmada experimentalmente por C. J. Davisson y L. H. Germer en 1927, recibió en 1929 el Premio Nobel de Física. Fue uno de los grandes físicos que contribuyeron al desarrollo de la mecánica cuántica.

Entre sus obras destacan: La nueva física y los cuantos 1937. Continuidad y discontinuidad en Física Moderna 1941. Física y microfísica 1947.

#### 4.4 Postulados de Louis De Broglie y Max Born

En 1924 Louis V. De Broglie postuló, que la dualidad *onda-partícula* se debe aplicar tanto a la radiación como a la materia. En efecto durante muchos años del siglo XIX y comienzos del XX, se había considerado a la radiación de carácter exclusivamente ondulatorio, pero se había descubierto que en su interacción con la materia tenía propiedades corpusculares.

Se encontró experimentalmente en 1927 por Davisson y Germer que los electrones tenían naturaleza ondulatoria fig.12.21 y G. P. Thomson obtuvo su diagrama de difracción haciéndolos incidir sobre una delgada lámina metálica con estructura cristalina. En consecuencia, estaba probado experimentalmente que los electrones que se habían considerado corpusculares tenían también un comportamiento ondulatorio.

De Broglie demuestra teóricamente que cada partícula material, debía tener una onda asociada, que no es de naturaleza electromagnética, razón por la que se denomina onda de materia. Así que tanto la materia como la radiación, poseen igualmente la naturaleza ondulatoria y corpuscular.

Postula que una partícula cuya masa en reposo sea diferente de cero, se mueve como si estuviera dirigida por una onda de materia asociada, además su energía y su momento lineal están relacionados con la frecuencia y la longitud de onda, de la onda asociada, por las ecuaciones conocidas como relaciones de Einstein-De Broglie.

$$E = h \cdot \nu \qquad p = \frac{h}{\lambda} \qquad (12.13)$$

Max Born estableció en 1926, que la relación entre una onda material y su partícula, era idéntica que la existente entre una onda electromagnética y su fotón. En consecuencia la probabilidad de encontrar una partícula material cerca de un punto, es proporcional al valor de la intensidad de la onda de materia asociada, cerca del mismo punto. El diagrama de difracción de la onda de materia asociada, nos puede ayudar a predecir el movimiento de una partícula, del mismo modo que para una onda electromagnética nos ayudaba a predecir el movimiento de un fotón.

##### Ejemplo 4.4.1

Un electrón es acelerado bajo una diferencia de potencial de 100 V. Determina la longitud de onda, de la onda de materia asociada con esta partícula. (No es necesario tener en cuenta la corrección relativista de la masa).

Datos: Masa en reposo del electrón  $m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg; carga  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C

El trabajo del campo eléctrico se invierte en energía cinética del electrón.

$$W = e \cdot V = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2 e \cdot V}{m_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 100 \text{ V}}{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}} = 5,9 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

El momento lineal  $p = m_0 v = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 5,9 \cdot 10^6 \text{ m/s} = 5,4 \cdot 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$

La longitud de onda asociada:  $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{5,4 \cdot 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s}} = 1,2 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 1,2 \text{ \AA}$

Esta  $\lambda$  corresponde con la región situada en el límite de los rayos X, siendo detectable mediante la difracción que puede producir sobre un cristal.

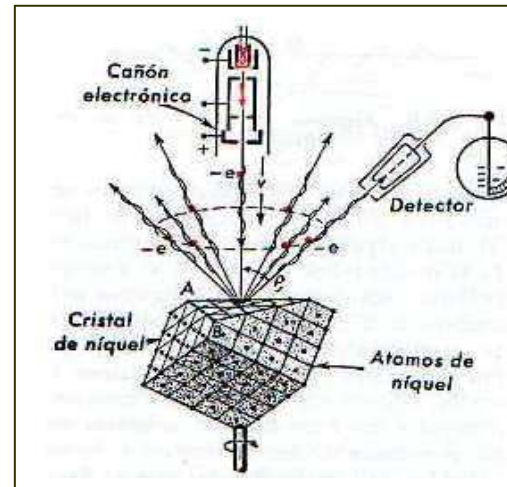


Fig. 12.21. C. J. Davisson y L. H. Germer proporcionaron en 1927 la primera prueba experimental de la naturaleza ondulatoria de las partículas.

Los electrones que son partículas, son emitidos por un cañón electrónico, para después acelerarlos con un campo eléctrico y dirigirlos hacia un cristal de níquel. Al incidir sobre las capas superficiales del cristal, observaron que eran difractados en diferentes ángulos, de un modo similar a lo que sucedería enviando rayos X.

#### Ejemplo 4.4.2

Un balón de fútbol de 425 g, es lanzado por un futbolista con una velocidad de 90 km/h. Determina la longitud de onda asociada.

Calculamos primero el momento lineal del balón:

$$p = m \cdot v = 0,425 \text{ kg} \cdot 90 \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 10,63 \text{ kg} \cdot \text{m} / \text{s}$$

Aplicando la relación de De Broglie:  $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{10,63 \text{ kg} \cdot \text{m} / \text{s}} = 6,24 \cdot 10^{-35} \text{ m}$

Resulta una magnitud tan pequeña que no existe ningún experimento que permita detectarla. Ten en cuenta que el tamaño de un átomo es del orden de magnitud de  $10^{-10} \text{ m}$ , es decir unas  $10^{24}$  veces más grande que la longitud de onda asociada.

#### 4.5 Conclusiones sobre la onda de materia asociada

La onda de materia asociada acompaña a todas las partículas materiales en movimiento cuya masa en reposo es distinta de cero, sin embargo, para las partículas macroscópicas de nuestro entorno, normales o grandes, la magnitud de la onda asociada aunque existe, es indetectable con los actuales medios experimentales disponibles.

Por el contrario, para las partículas microscópicas de la física atómica, la longitud de onda asociada al movimiento de estas partículas es perfectamente detectable y además tiene importantes aplicaciones prácticas, como por ejemplo el microscopio electrónico o el de efecto túnel.

### 5 Principios de incertidumbre de Heisenberg

Cuando estudiamos el movimiento de un balón para determinar su posición, lo consideramos como una partícula localizada en su centro de masas y simultáneamente medimos su velocidad. Realizando ambas medidas con cuidado se puede obtener una buena exactitud.

Para cuerpos macroscópicos sabiendo la posición y la velocidad inicial, y las fuerzas que actúan, las leyes de Newton establecen las ecuaciones del movimiento y permiten calcular la posición y la velocidad en cualquier instante posterior.

Para partículas microscópicas como un fotón o un electrón, resulta imposible localizar su posición exacta sobre la pantalla después de haber atravesado una rendija y únicamente sabemos que es bastante más probable hallarlo en la zona donde hay un máximo de intensidad. Así mismo, existen procedimientos estadísticos para predecir las velocidades que tiene una partícula microscópica, pero no para calcular su valor exacto. *En definitiva, resulta imposible determinar con gran exactitud la posición de una partícula microscópica, así como su velocidad.*

Ahora bien, ¿son pequeñas o grandes las incertidumbres de estas magnitudes?, ¿serán consecuencia de las limitaciones de los aparatos de medida y del observador?. En 1927 Heisenberg propuso unos principios conocidos como de incertidumbre, en los que manifestaba la existencia de un límite impuesto por la naturaleza, en la exactitud con que determinadas medidas puedan ser realizadas de forma simultánea. Los procedimientos instrumentales incrementarían estos límites pero no serán su causa.



Max Born físico alemán (1882-1970) nació en Breslau hoy Polonia. Se doctoró en Gotinga en 1907 y fue profesor en Gotinga, Berlín y Frankfurt, siendo en 1921 nombrado Catedrático de la prestigiosa Universidad de Gotinga, dedicándose a los estudios de problemas relacionados con la materia y la radiación. En 1933 con la llegada del nazismo tuvo que marchar a Inglaterra como refugiado, siendo nombrado director de investigación de la Universidad de Cambridge. Desde 1936 a 1953 fue catedrático de Filosofía Natural (Física) de la Universidad de Edimburgo en Escocia.

En 1954 recibió el Premio Nobel de Física por sus investigaciones en Mecánica Cuántica, especialmente por su interpretación estadística de la función de onda. Fue una de los firmantes del manifiesto de Gotinga en 1958.

Entre sus publicaciones destacan: La teoría de la Relatividad de Einstein 1922. Física atómica 1935. Filosofía Natural de causa y causalidad 1949. Física y política 1962. Mi vida y mis opiniones 1968.

## 5.1 La relación de incertidumbre para la posición y el momento lineal

Consideremos una partícula que se mueve a lo largo del eje X, siendo  $\Delta X$  la incertidumbre con que se ha medido su posición en un instante  $t$ . Si tiene un momento lineal  $p_x = mv_x$  y si su incertidumbre en el mismo instante es  $\Delta p_x$ , el principio de incertidumbre asegura que el producto de la incertidumbre de la posición, por la incertidumbre del momento lineal medidos en el mismo instante, tiene que ser igual o mayor que la constante de Planck entre  $4\pi$ .

$$\Delta X \cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi} \quad (12,14)$$

La relación no limita el valor de  $\Delta X$  o el de  $\Delta p_x$ , solo limita su producto, así que afinando mucho en la determinación de la incertidumbre de la posición  $\Delta X$  pequeño, inevitablemente se perderá exactitud en la medida del momento lineal, resultando la indeterminación de  $\Delta p_x$  grande, y viceversa.

### Ejercicio 5.1.1

Una canica de 15 g se mueve por el eje X con una velocidad de 2 m/s, cuando se ilumina para ver su posición, con un LASER de luz roja de longitud de onda 632 nm. Calcula la indeterminación mínima en la medida de su momento lineal.

La menor incertidumbre en la medida de la posición no puede ser inferior a la longitud de onda de la luz empleada, así que tomaremos para ésta incertidumbre  $\Delta X = \pm 632 \cdot 10^{-9} \text{ m}$

Aplicando el principio de incertidumbre.

$$\Delta X \cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi}; \quad 632 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot \Delta p_x \geq \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{4\pi}; \quad \Delta p_x \geq 8 \cdot 10^{-29} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Esta es la mínima incertidumbre que en las condiciones de la medida, se puede cometer en la determinación del momento lineal. Un valor tan pequeño carece de influencia para los objetos macroscópicos, fíjate que resulta despreciable frente a su momento lineal,  $p = m \cdot v = 0,015 \text{ kg} \cdot 2 \text{ m/s} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$

### Ejercicio 5.1.2

Considerando que en el átomo de Bohr, el electrón gira alrededor del núcleo en una órbita de radio  $r = 0,53 \text{ \AA}$ . Determina la incertidumbre en el momento lineal.

Parece razonable encontrar al electrón dentro del volumen del átomo. Podemos estimar la incertidumbre de la posición en  $\pm r$ , es decir  $\Delta X = \pm 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

Aplicando el principio de incertidumbre:

$$\Delta X \cdot \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}; \quad 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m} \cdot \Delta p \geq \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{4\pi}; \quad \Delta p \geq 10^{-24} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Para apreciar la magnitud de ésta incertidumbre, vamos a determinar el valor del momento lineal del electrón considerándolo como una partícula en el modelo atómico de Bohr. El valor de  $p$  viene dado por la relación.

$$p = mv = \frac{h}{2\pi r} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{2\pi \cdot 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m}} = 2 \cdot 10^{-24} \text{ Kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Observa que  $\Delta p$  es la mitad de  $p$ . Para partículas microscópicas la incertidumbre en el momento lineal puede ser del orden de la magnitud medida, es decir muy importante, y no puede ignorarse el principio de incertidumbre.



Werner Karl Heisenberg físico alemán (1901-1976). Realizó sus estudios en Munich donde se doctoró con Sommerfeld en 1923. Después marchó a la Universidad de Gotinga, donde estuvo de ayudante del profesor Max Born y durante el periodo de 1924-27 pasó largas temporadas en Copenhague con el profesor Niels Bohr. En 1925 desarrolló una primera versión de la mecánica cuántica conocida como mecánica matricial, siendo nombrado catedrático de Física en 1927 de la Universidad de Leipzig, año en el que publicó el principio de incertidumbre. Las consecuencias del principio han sido muy importantes para la Física con el desarrollo de la mecánica cuántica y para la Filosofía porque muchos entendieron que el principio derribaba la idea tradicional de causa y efecto –la causa de cualquier efecto es consecuencia de un precedente, sin el cual el efecto considerado nunca se habría producido-.

En 1932 recibe el Premio Nobel de Física y en 1941 pasó a la Universidad de Berlín. Durante la Segunda Guerra Mundial estuvo a cargo de la investigación científica en el proyecto alemán de lograr la bomba atómica. De 1946 a 1958 fue profesor de la Universidad de Gotinga y uno de los firmantes del manifiesto. Desde 1958 a 1970 fue Catedrático en la Universidad de Munich.

## 5.2 La relación de incertidumbre para la energía y el tiempo

Existen también relaciones de incertidumbre para otras parejas de magnitudes, una de ellas es la energía y el tiempo. Si la medida de la energía  $E$  de una partícula se hace con una incertidumbre  $\Delta E$  y en la realización de la medida se emplea un intervalo de tiempo  $\Delta t$ , el principio de incertidumbre *tiempo-energía* exige que el producto de las incertidumbres sea mayor o igual que la constante de Planck dividido por  $4\pi$ .

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{4\pi} \quad (12,15)$$

### Ejemplo 5.2

*Un átomo excitado regresa a su estado normal, emitiendo fotones con una cierta energía. El tiempo medio que transcurre entre la excitación y la emisión es del orden de  $10^{-8}$  s, ¿cuál es la incertidumbre en la energía del fotón?*

Tomaremos el intervalo de tiempo indicado, como una medida de la incertidumbre del tiempo  $\Delta t$ .

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{4\pi}; \quad \Delta E \geq \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{4\pi \cdot 10^{-8} \text{ s}} \geq 5,28 \cdot 10^{-27} \text{ J} \geq 3,30 \cdot 10^{-8} \text{ eV}$$