# CINEMÁTICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

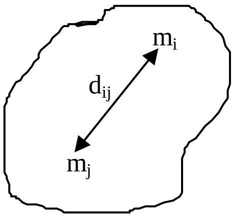



Fig.1

*Un sólido rígido se considera como un conjunto de partículas numerables: $m_1$ , ...$m_i$ ....$m_n$ cuyas distancias mutuas permanecen invariables, en las condiciones habituales de trabajo del cuerpo.* Así por ejemplo, la distancia entre dos partículas cualesquiera como $m_i$ *y* $m_j$ ; que designamos por $d_{ij}$ ; se mantiene siempre constante, fig.1.

En otras ocasiones se toma el sólido como un continuo, pero sin interesarnos por su estructura interna. Entonces se le considera formado por elementos de masa *dm*, sin necesidad de distinción entre cada uno de ellos, fig.2.

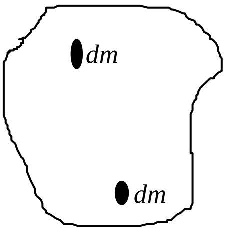



Fig.2

En realidad, ningún sólido es absolutamente rígido, ya que aplicándole fuerzas suficientemente intensas se le puede deformar, sin embargo, para fines prácticos, en las condiciones normales de trabajo a que los sólidos están sometidos, las variaciones de dimensiones que pueden sufrir, son lo suficientemente pequeñas, como para poder pasarlas por alto y ser de aplicación el modelo de sólido rígido que se va a estudiar a continuación.

Debe saber el lector, que otra parte de la Física se ocupa de las deformaciones de los sólidos, se conoce como **Resistencia de Materiales**, y que es de gran interés en la Ingeniería.

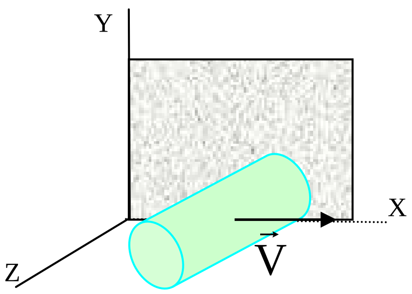



Fig.3

**El movimiento de un sólido rígido** puede ser:

- * De traslación.
- * De rotación.
- * Un movimiento combinado de rotación y traslación, lo designaremos como movimiento general.

El análisis que se hará a continuación, se limitará únicamente **al movimiento plano**, *en él, todas las partículas del sólido rígido se mueven en planos paralelos a uno fijo.* En el caso del cilindro de la fig. 3; todas sus partículas se desplazan en planos paralelos al XY.

## MOVIMIENTO DE TRASLACIÓN

**Un sólido rígido efectúa una traslación**, *cuando el segmento que une dos cualesquiera de sus partículas, por ejemplo las A y B de las fig.4 y fig.5, siempre permanece paralelo a la posición inicial durante el movimiento.*

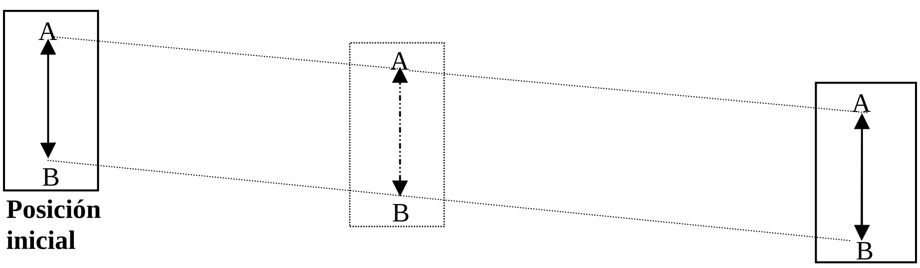



Fig.4

**La traslación es rectilínea**, si las trayectorias seguidas por las partículas del sólido rígido en su movimiento son líneas rectas. Así sucede con las trayectorias de los puntos A y B de la fig.4, que se representan en el dibujo mediante líneas discontinuas.

**La traslación es curvilínea,** cuando las trayectorias seguidas por las partículas del sólido rígido son líneas curvas. Obsérvense en la fig.5, las trayectorias de las partículas A y B. Nótese que es una traslación, porque el segmento AB sigue paralelo así mismo, y a como se encontraba en la posición inicial.

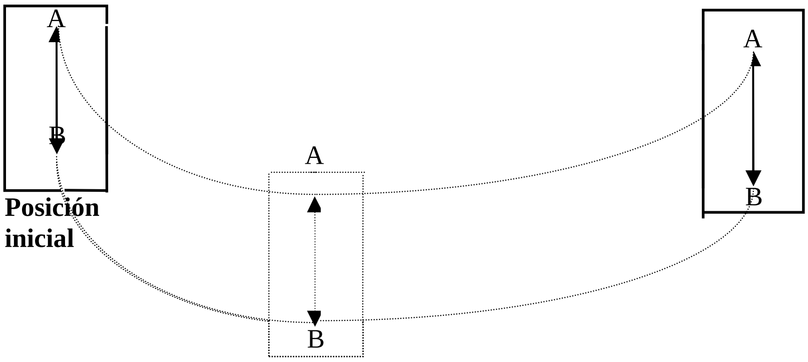



Fig.5

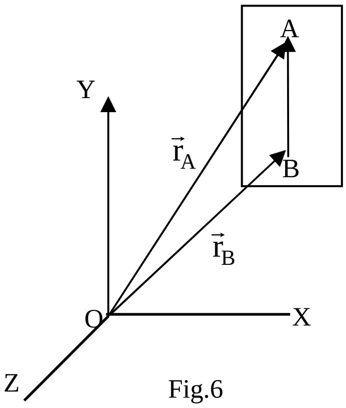



Fig.6

**a) Determinación de la velocidad de cada una de las partículas del sólido rígido, cuando efectúa una traslación**.

Se toma un origen de referencia en O, fig.6, y los vectores de posición $\vec{r}_A$ y $\vec{r}_B$ de los puntos A y B. En la misma se define un vector $\overline{B\vec{A}}$, y de ella se deduce fácilmente, que $\vec{r}_A = \vec{r}_B + \overline{B\vec{A}}$. Derivando los vectores anteriores respecto del tiempo, se obtiene el vector velocidad.

$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{r}_A}{dt} = \frac{d\vec{r}_B}{dt} + \frac{d\,\overline{B\vec{A}}}{dt}$$

El vector $\overline{B\vec{A}}$ por pertenecer a un sólido rígido, es constante en módulo, pero además, por tratarse de un movimiento de traslación, es constante en dirección y sentido, en resumen, que se trata de un vector constante y por lo tanto su derivada es nula. Resulta en consecuencia, que las partículas A y B tienen la misma velocidad, fig.7.

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B \qquad (1.1)$$

*Cuando un sólido rígido realiza una traslación, bien sea rectilínea o curvilínea, en cada instante, la velocidad es la misma para todas sus partículas.*

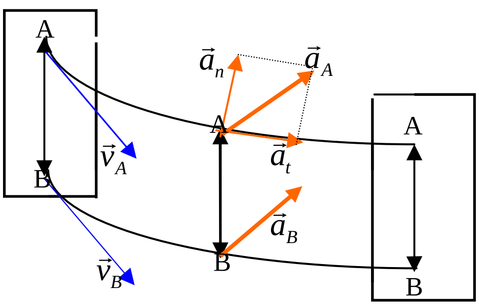



Fig. 7

**b) Determinación de la aceleración de las distintas partículas del sólido rígido.** Se deriva la ecuación (1.1) respecto del tiempo.

$$\frac{d\vec{v}_A}{dt} = \frac{d\vec{v}_B}{dt}; \qquad \text{en consecuencia:} \qquad \vec{a}_A = \vec{a}_B \qquad (1.2)$$

E*n cada instante,* la *aceleración es la misma para todas las partículas de un sólido rígido, que efectúa una traslación.*

En el caso de una traslación rectilínea, los vectores velocidad y aceleración, están sobre la propia trayectoria de cada partícula, sin embargo, si la traslación es curvilínea, la velocidad es tangente a la trayectoria, pero la aceleración tiene sus dos componentes intrínsecas, la tangencial $\vec{a}_t$ en la dirección del vector velocidad y la normal $\vec{a}_n$, en dirección perpendicular a la tangente y con sentido hacia el centro de curvatura del elemento de trayectoria, véase la fig.7.

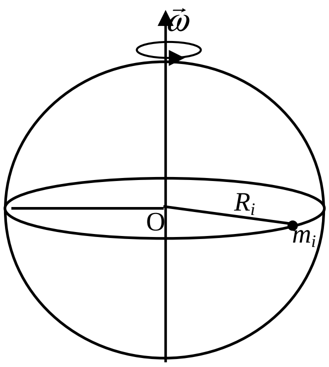


Fig.8

## MOVIMIENTO DE ROTACIÓN DE UN SÓLIDO RÍGIDO, ALREDEDOR DE UN EJE FIJO.

Cuando un sólido rígido gira con una cierta velocidad angular $\vec{\omega}$ entorno a un eje de rotación, cada una de sus partículas tiene que describir una circunferencia con centro en el eje, ya que por definición de sólido rígido, la distancia de la partícula al eje debe permanecer constante. Si centramos la atención en una partícula como la $m_i$ se observa en la fig.8, como describe una circunferencia de radio $R_i$ con centro en el punto O. Los puntos del sólido que forman el eje de rotación, se considera que no giran.

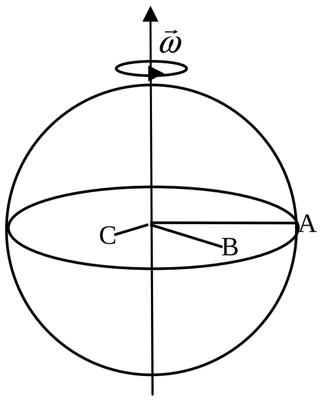


Fig.9

Debe comprenderse, que *la velocidad angular* $\vec{\omega}$ *es en cada instante, la misma para todas las partículas del sólido rígido con un movimiento de rotación*. Si se consideran tres partículas A, B y C, que en un cierto instante están situadas en línea recta y suponemos que después de haber girado el sólido un cierto tiempo, se podrían encontrar como en la fig.9, significaría que habrían girado ángulos distintos, lo que haría variar la distancia entre ellas, contradiciendo la definición dada para el sólido rígido. En consecuencia tal posibilidad no puede darse y la velocidad angular debe ser igual para todas las partículas del sólido en cada instante.

Cuando la velocidad angular $\vec{\omega}$ no permanece constante, es decir que depende del tiempo, entonces existe aceleración angular $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \neq 0$; fig.10 y al igual que la velocidad angular $\vec{\omega}$, es en cada instante, la misma para todas las partículas del sólido rígido. En resumen: *tanto la velocidad angular* $\vec{\omega}$, *como la aceleración angular* $\vec{\alpha}$, *en cada instante, son iguales para todas las partículas del sólido rígido, cuando gira alrededor de un eje fijo.*

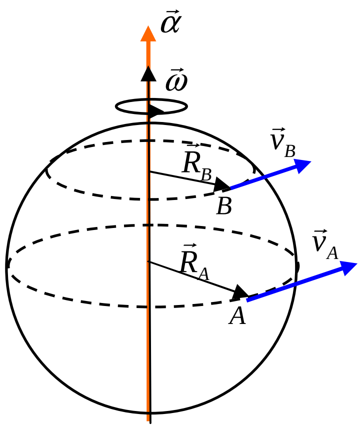


Fig.10

***La velocidad lineal*** *de cada partícula del sólido rígido, es sin embargo un vector distinto para cada una*. Recuérdese, que para una partícula que gira alrededor de un eje fijo, se verifica que $\vec{v}_i = \vec{\omega} \wedge \vec{R}_i$; de modo que la velocidad lineal va a depender de la distancia de la partícula al eje de rotación. En la fig.10 se representan las velocidades lineales de dos partículas del sólido rígido, nótese, que cuanto más alejada se encuentra del eje, mayor es su velocidad lineal $\vec{v}_A > \vec{v}_B$.

***La aceleración*** *de cualquier partícula del sólido rígido, también es distinta para cada una.* Se obtiene de derivar respecto del tiempo, la ecuación $\vec{v}_i = \vec{\omega} \wedge \vec{R}_i$.

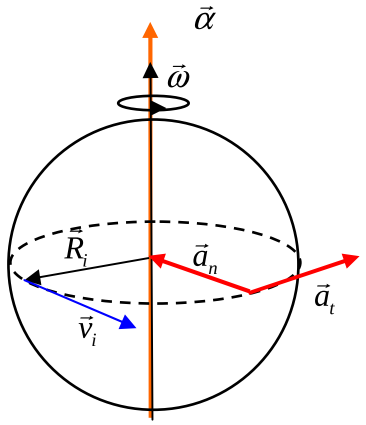



Fig.11

$$\vec{a}_i = \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge \vec{R}_i) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{R}_i + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{R}_i}{dt} = \vec{\alpha} \wedge \vec{R}_i + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_i$$

Obteniéndose las componentes intrínsecas de la aceleración: la tangencial $\vec{a}_{t,i} = \vec{\alpha} \wedge \vec{R}_i$; y la normal $\vec{a}_{n,i} = \vec{\omega} \wedge \vec{v}_i$, que aquí toman expresiones distintas de las habituales. Se representan a la derecha de la fig.11, y el lector debe verificar aplicando las reglas del producto vectorial, que tienen la dirección y el sentido indicados.

## MOVIMIENTO GENERAL PLANO

Este movimiento se produce cuando el sólido rígido se desplaza, tal que el segmento que une dos puntos cualesquiera AB, ya no va a permanecer paralelo a la dirección inicial, véase la fig.12. Este movimiento se puede descomponer en dos movimientos simultáneos, compuestos de una traslación y de una rotación alrededor del punto A. En la fig.13 se representa (en puntos) el sólido rígido, después de la traslación, y en línea continua, cuando ya ha efectuado el giro, alrededor de un eje perpendicular que pasa por A.

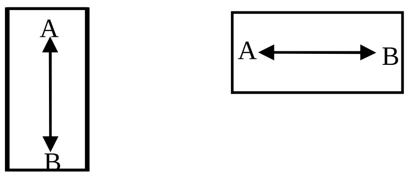
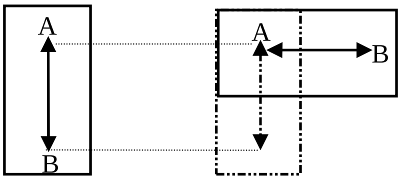



Fig.12

**a) Relación entre las velocidades de dos puntos de un sólido rígido, que efectúa un movimiento general**




Traslación + Rotación

Fig.13

Se trata de buscar una ecuación, que determine la velocidad de un punto B, $\vec{v}_B$ del sólido rígido, si se conocen la velocidad $\vec{v}_C$ de otro punto C del mismo fig.14, respecto de un sistema de referencia y la velocidad angular del sólido $\vec{\omega}$.
Considerando la combinación de traslación más rotación, en la fig.14 se representa una rueda que gira en el sentido de las agujas de un reloj, el vector $\vec{\omega}$(no dibujado) es perpendicular al plano del papel y entrante en C. Sabemos que la velocidad de traslación es la misma para todas las partículas del sólido, de modo que vale igual para las partículas C y B. Si además se considera que hay una rotación alrededor del punto C, con una velocidad angular $\vec{\omega}$, para calcular la velocidad del punto B, habrá que añadir el término $\vec{\omega} \wedge \vec{CB}$ que tiene en cuenta el efecto en la velocidad, de la rotación. De modo que la velocidad de B es la suma de la de traslación + la de rotación

$$\vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge \vec{CB} \qquad (1.3)$$

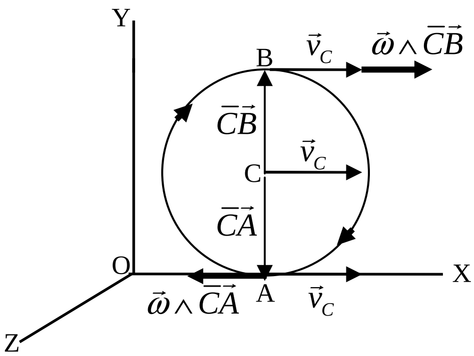



Fig.14

**b) Como ejemplo de aplicación, se va a estudiar ampliamente el caso de una rueda con un movimiento general**. El eje de rotación pasa por su centro de masas, punto C, fig.14 y fig.15.
Puede observarse en el dibujo, que las velocidades de las partículas: B, C, A; de acuerdo con (1.3) serán distintas. Si es R el radio de la rueda, $|\vec{CB}| = |\vec{CA}| = R$; y se tienen en cuenta las reglas del producto vectorial, los vectores velocidad de las tres partículas serán:

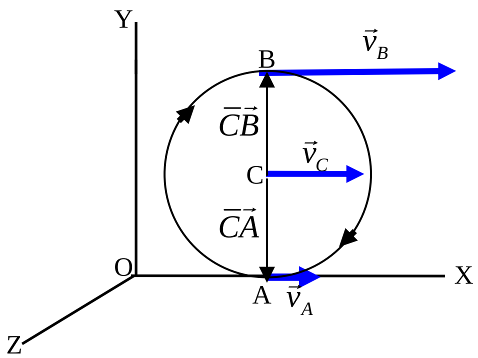



Fig.15

$$\vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge \overline{CB} = v_C \vec{i} + \omega R \vec{i} = (v_C + \omega R)\vec{i}$$
$$\vec{v}_C = v_C \vec{i}$$
$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge \overline{CA} = v_C \vec{i} - \omega R \vec{i} = (v_C - \omega R)\vec{i} \quad (1.4)$$

Vectores que por resultar paralelos al eje X, se han expresado en función del unitario $\vec{i}$. En el dibujo es:

$$\vec{v}_B > \vec{v}_C > \vec{v}_A$$

*Cuando la velocidad del punto A, que está en contacto con el suelo, sea distinta de cero, **se dice que hay deslizamiento.***

**ANÁLISIS CINEMÁTICO DE LA RODADURA**

La rodadura es un tipo de movimiento, que se produce únicamente, cuando la velocidad del punto A en contacto con el suelo, es nula. Entonces, los vectores $\vec{v}_C$ y $\vec{\omega} \wedge \overline{CA}$ son iguales y de sentido contrario, por eso su suma resulta nula, fig.16. Se deduce de (1.4)

$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge \overline{CA} = (v_C - \omega R)\vec{i} = 0$$

De la ecuación anterior resulta **la primera condición cinemática de la rodadura:**

$$\boxed{\mathbf{v_C - \omega \cdot R = 0 \qquad v_C = \omega \cdot R \qquad (1.5)}}$$

***Cuando existe rodadura,*** *el modulo de la velocidad de traslación del centro de masas, es igual al módulo de la velocidad angular por el radio.*

El punto A, aunque su velocidad es en todo instante respecto de los ejes en O cero, tiene en cambio una aceleración normal o centrípeta de valor $\omega^2 \cdot R$, como después veremos.

Cuando el sólido tenga aceleración de traslación, es decir, que haya una aceleración de su centro de masas, $\vec{a}_C \neq 0$ y además rodadura, ¿cómo es la aceleración del punto A?

Para averiguarlo se va a derivar respecto del tiempo, la ecuación (1.5) teniendo en cuenta que el radio en módulo es constante.

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \bullet R + \omega \bullet \frac{dR}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \bullet R + \omega \bullet 0 = \frac{d\omega}{dt} \bullet R$$

De donde se deduce que: $\boxed{\mathbf{a_C = \alpha \bullet R \qquad (1.6)}}$

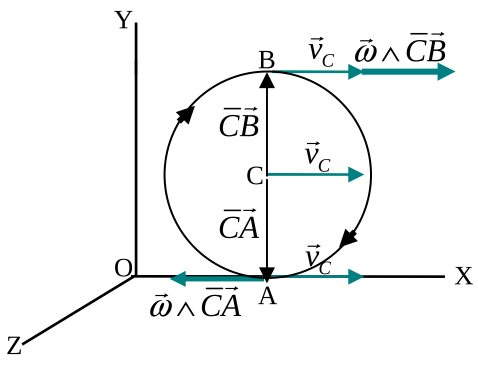



Fig.16. El punto A tiene velocidad nula respecto de los ejes en O.

**La ecuación (1.6) constituye la segunda condición cinemática de la rodadura y dice:** *Cuando existe rodadura, y el sólido rígido se traslada con aceleración, entonces, el módulo de la aceleración del centro de masas, es igual a la aceleración angular por el radio.*

**Finalmente vamos a averiguar cuanto vale la aceleración del punto A**. Derivando la ecuación (1.4) respecto del tiempo, y considerando al vector $\overline{CA}$ como un vector giratorio, de módulo constante, resulta:

$$\frac{d\vec{v}_A}{dt}=\frac{d\vec{v}_C}{dt}+\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{CA}+\vec{\omega}\wedge\frac{d\overrightarrow{CA}}{dt}\right]=\vec{a}_C+\left[\vec{\alpha}\wedge\overrightarrow{CA}+\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{CA})\right]$$

Los dos sumandos que figuran en el corchete, corresponden con las componentes intrínsecas de la aceleración, respectivamente, la tangencial y la normal, para un movimiento de rotación. Operando se puede escribir:

$$\vec{a}_A=(a_C-\alpha\bullet R)\vec{i}+(-\omega\vec{k})\wedge(-\omega R\vec{i})=(a_C-\alpha R)\vec{i}+\omega^2 R\vec{j}$$

Imponiendo la segunda condición cinemática de la rodadura (1.6) resulta: $\vec{a}_A=\omega^2 R\,\vec{j}$

*Cuando se produce la rodadura, el punto en contacto con el suelo, solo tiene aceleración normal*, fig.15.

**En resumen:** Cuando un sólido rígido rueda, se cumple en todo instante, que la velocidad del punto en contacto con el suelo es nula y su aceleración es solo normal. Además, se verifican las dos condiciones cinemáticas de la rodadura.

De no cumplirse estas condiciones, no se puede hablar de rodadura, y el movimiento de la rueda es una combinación de traslación y rotación, que en general se llama deslizamiento.

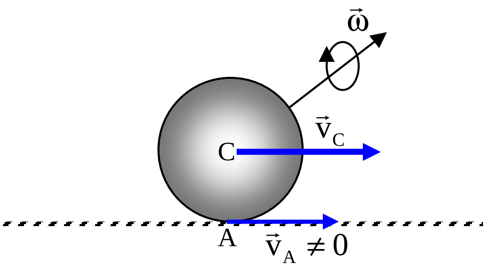



Fig.17 Como la velocidad del punto A, es distinta de cero hay deslizamiento.

**Ejemplo:** Una bola esférica de radio 10 cm, se desplaza por una superficie horizontal, con una velocidad de traslación de 2 m/s. y con una velocidad angular de 5 rad/s, fig.17. Determínese:

a) La bola rueda o desliza.

b) El valor que debería tomar la velocidad angular, para que la bola comience a rodar.

a) Se comprobará, si se verifica o no, que $v_C-\omega\bullet R=0$

$$2\frac{m}{s}-5\frac{rad}{s}\bullet 0{,}1m=1{,}5\frac{m}{s}\neq 0\ ;\quad \text{La bola desliza}$$

b) Despejando $\omega$ de la primera condición de rodadura:

$$\omega=\frac{v_C}{R}=\frac{2\,m/s}{0{,}1m}=20\frac{rad}{s}$$

Cuando gire con esta velocidad angular, entonces en lugar de deslizamiento ya hay rodadura.