

Rodadura. Estudio experimental con las aceleraciones angular y del centro de masas

Jaime Solá de los Santos, Ricardo Fernández Cruz y José Luis Hernández Pérez

En este trabajo sobre la rodadura se expone un experimento en el cual se miden simultáneamente las aceleraciones del centro de masas y la angular de un cilindro que desciende por un plano inclinado. El método de medida utiliza la fotografía digital estroboscópica. Los datos experimentales se comparan con el modelo teórico y se comprueba hasta que punto existe acuerdo entre ambos.

Los problemas de mecánica con intervención de las fuerzas de rozamiento nunca pueden alcanzar soluciones “exactas” dada la complejidad de esas fuerzas. De los libros de uso, sin duda quién mejor ha descrito las dificultades inherentes al estudio de las fuerzas de rozamiento es el libro de Feynman [1]. No obstante, al menos dentro de un cierto margen, la ecuación empírica $F_R = \mu \cdot N$ se puede emplear y puede conducir a resultados razonablemente concordantes entre la teoría y el experimento, cuando hay deslizamiento.

El estudio dinámico del movimiento de un aro de radio exterior R_e bajando por un plano inclinado un ángulo θ , figura 1, se hace considerando las fuerzas que actúan.

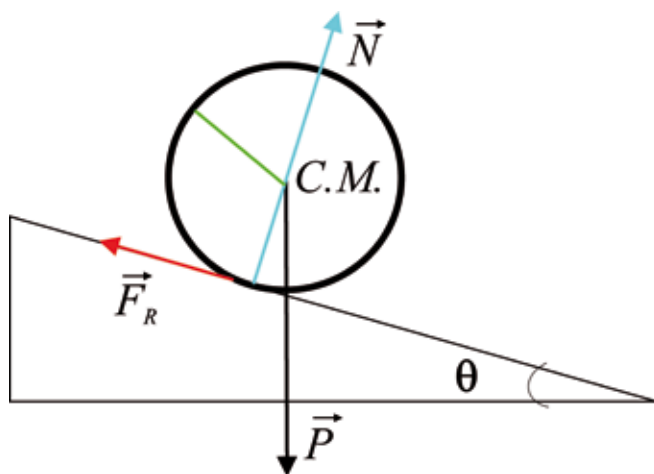


Figura 1. Fuerzas que actúan sobre un aro situado en un plano inclinado.

Su análisis conduce a unas ecuaciones que tienen en cuenta la dinámica de la traslación y de la rotación. Estas ecuaciones deben considerarse como correspondientes a un modelo teórico:

$$mg \sin \theta - F_R = ma_{CM} \quad (1)$$

$$F_R \cdot R_e = I \cdot \alpha \quad (2)$$

$$a_{CM} = \alpha \cdot R_e \quad (3)$$

$$F_R(\text{máxima}) = \mu \cdot N = \mu mg \cos \theta \quad (4)$$

Donde α es la aceleración angular y a_{CM} es la aceleración del centro de masas (C. M.) del aro.

Las ecuaciones (1) (2) y (3) se emplean cuando el movimiento es de rodadura y por lo tanto no hay deslizamiento y de ellas se deducen los siguientes resultados para las aceleraciones:

$$a_{CM} = \frac{mg}{m + \frac{I}{R_e^2}} \sin \theta \quad (5)$$

$$\alpha = \frac{mg}{mR_e + \frac{I}{R_e}} \sin \theta \quad (6)$$

Las ecuaciones (1), (2) y (4) se utilizan cuando existe rotación acompañada de deslizamiento y por combinación de las mismas se llega a:

$$\frac{a_{CM}}{\cos \theta} = g \tan \theta - \mu g \quad (7)$$

$$\frac{a_{CM}}{\alpha} = \frac{I}{m\mu R_e} \tan \theta - \frac{I}{mR_e} \quad (8)$$

Del estudio anterior cabe destacar que en el intervalo en que la ecuación (3) se cumple, el movimiento del cuerpo es de rodadura y que este movimiento se mantiene mientras que la fuerza de rozamiento, $F_R \leq \mu \cdot N$ y no alcance su valor máximo, a partir de ese momento la ecuación (3) carece de validez y empieza otro tipo de movimiento que denominamos de rotación con deslizamiento. En consecuencia, si se miden las aceleraciones del centro de masas en función del ángulo del plano θ , debe ocurrir un cambio puntual al pasar de un tipo de movimiento al otro. Sobre este tema se han realizado diversos trabajos, como por ejemplo los señalados en la bibliografía como [2]; [3] y alguno publicado en esta revista [4]. En los mencionados artículos sólo se mide la aceleración del centro de masas, pero no la aceleración angular y se limitan a destacar el cambio de movimiento de rodadura a rotación con deslizamiento y a comparar los valores experimentales, con los esperados teóricamente.

En este trabajo se miden las aceleraciones del centro de masas y las angulares y se estudia el comportamiento de ambas magnitudes tanto en la rodadura, como en la rotación con deslizamiento y se comparan los valores experimentales con los teóricos previstos por las ecuaciones

anteriormente expuestas. No se considera la longitud de rodadura porque hemos observado que para su determinación experimental, la inclinación necesaria del plano era de algunas décimas de grado y estos valores son del orden del error con el que hemos realizado las medidas. La dificultad para medir la longitud de rodadura ya ha sido expuesta en el artículo [5].

Técnica de medida

Para poder medir simultáneamente las aceleraciones del C.M. y las angulares hacemos uso de la fotografía digital estroboscópica, cuyo modo de operar se ha expuesto en esta revista [6]. Como materiales se emplean: a) un aro de acero, cuya masa medida en una balanza es $m = 0,437 \pm 0,001 \text{ kg}$ y sus radios, medidos con un calibrador, son: el interno $R_i = 0,0910 \pm 0,0005 \text{ m}$ y el externo $R_e = 0,0934 \pm 0,0005 \text{ m}$.

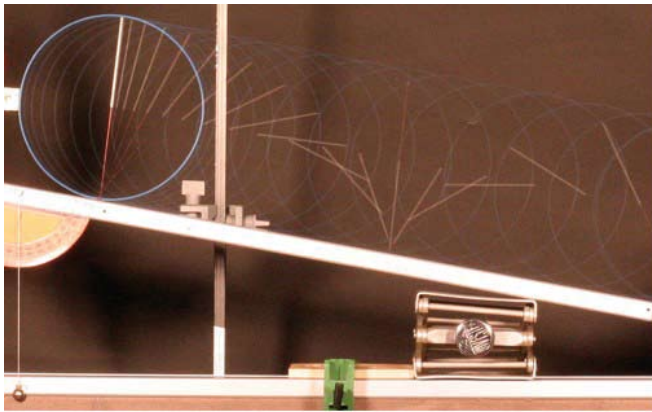


Figura 2. Movimiento del aro bajando por el plano inclinado.

Al citado aro se le ha fijado una barra muy fina en su interior, la mitad de la cual se ha pintado de blanco para que quede registrada su posición en la fotografía, b) un plano inclinado de aluminio con plomada, c) un electroimán y d) un conjunto formado por cámara digital, disco estroboscópico, puerta óptica con cronómetro incorporado de 1 ms y focos de luz.

En la figura 2 se muestra una fotografía estroboscópica del montaje experimental con el aro en reposo y también de su movimiento por el plano, que es la base de la realización de todas las medidas.

El procedimiento de trabajo consiste en fijar un ángulo para el plano inclinado y dejar desplazarse al aro por el mismo y al mismo tiempo fotografiar su movimiento.

Para cada ángulo de inclinación del plano se realizan cinco fotografías y cinco medidas. Posteriormente de cada foto se obtiene una impresión en tamaño folio y sobre ella se miden las posiciones del centro de masas, los ángulos girados por el aro y el ángulo de inclinación del plano.

Los tiempos correspondientes a cada una de las posiciones del aro se miden por el procedimiento descrito en el artículo indicado con [6].

Con los datos obtenidos y una hoja de cálculo se obtienen unas gráficas, (que no se adjuntan, por no estar directamente relacionadas con el objetivo de este trabajo y así evitar alargarlo en exceso), que permiten la obtención

de los siguientes datos experimentales: ángulo del plano inclinado y las aceleraciones angulares y de traslación del centro de masas del aro.

Obtenidos estos valores se pueden realizar representaciones gráficas que permiten estudiar los distintos movimientos del aro en el plano inclinado, a medida que varía la pendiente del mismo.

En las medidas experimentales de las aceleraciones del centro de masas y la angular, se observa que la dispersión crece, aunque no de forma regular, al aumentar el ángulo del plano. En la zona de rodadura la dispersión de ambas aceleraciones es pequeña, sin embargo, cuando hay rotación con deslizamiento encontramos que la dispersión es mayor, particularmente con la aceleración angular. En las gráficas que vienen a continuación aparecen barras de distinta longitud, que indican la dispersión de cada medida.

En la figura 3 está representada la aceleración del centro de masas del aro, en función del ángulo del plano encontrándose un cambio de comportamiento a partir de un cierto valor que puede medirse directamente en la gráfica.

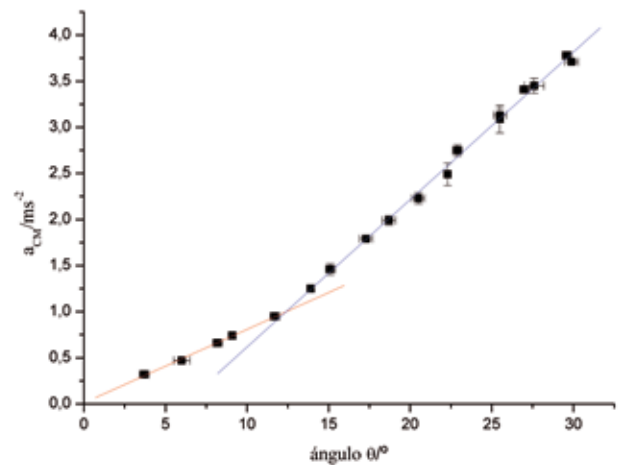


Figura 3. Aceleración del C.M. frente al ángulo del plano.

En la gráfica de la figura 3 se observa este cambio y se deduce que el paso de rodadura, a rotación con deslizamiento, tiene lugar cuando $\theta_c \approx 12,5^\circ$.

Utilizando las ecuaciones del movimiento aplicadas al ángulo crítico, en que termina la rodadura y comienza la rotación con deslizamiento y haciendo en las mismas $\theta = \theta_c$ para un aro cuyo radio interior es R_i y exterior R_e , resulta:

$$\mu = \frac{R_i^2 + R_e^2}{R_i^2 + 3R_e^2} \text{tag} \theta_c$$

$$\mu = \frac{0,0910^2 + 0,0934^2}{0,0910^2 + 3 \cdot 0,0934^2} \text{tag} 12,5^\circ = 0,10$$

El coeficiente de rozamiento entre el aro y el plano, es $\mu \approx 0,10$.

Rodadura

En el tramo de la figura 3 en que solo existe *rodadura*, representamos la aceleración del centro de masas

frente a la aceleración angular, figura 4. La pendiente de la recta es el valor numérico del radio exterior del aro y vale $0,0946 \pm 0,0006 \text{ m}$. Comparándolo con el valor medido directamente con un calibrador, $0,0934 \pm 0,0005 \text{ m}$, observamos que el error cometido es de aproximadamente un 2%, lo que nos confirma que el modelo teórico de la rodadura, en el que $a_{CM} = \alpha \cdot R_e$ está en buen acuerdo con nuestros resultados experimentales.

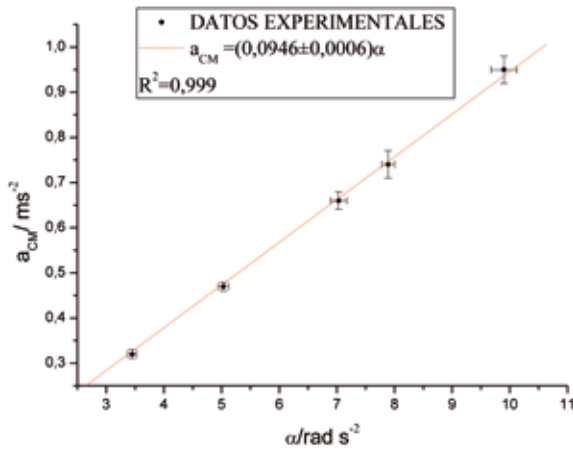


Figura 4. Aceleración del C. M. frente a la aceleración angular cuando hay rodadura con $\theta \leq \theta_c$.

Rotación con deslizamiento

En aquella zona en la que el ángulo del plano, determina que el movimiento combine simultáneamente, rotación con deslizamiento, hemos realizado dos representaciones gráficas para tomar en consideración por separado, los aspectos relacionados con la aceleración del centro de masas y la angular:

a) *Determinación del valor del coeficiente de rozamiento empleando la aceleración del centro de masas.*

De acuerdo con la ecuación (7), representamos el cociente de la aceleración del C.M. y el coseno del ángulo del plano, frente a la tangente del mismo, para determinar la aceleración de la gravedad g y el coeficiente de rozamiento μ .

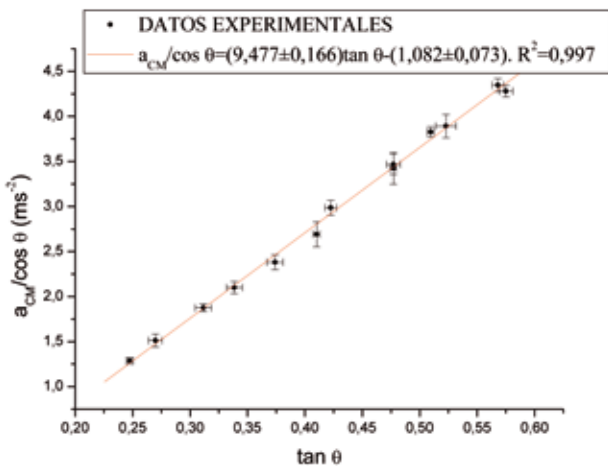


Figura 5. Aceleración del C. M. dividido por el coseno del ángulo del plano, frente a la tangente del ángulo.

De la gráfica de la figura 5 se deduce, que la pendiente experimental suministra como valor de la aceleración de la gravedad $g = 9,477 \pm 0,166 \text{ ms}^{-2}$ que comparado con el valor estándar, supone una desviación menor del 4%.

Vamos a emplear el valor de g experimental junto con el obtenido de la ordenada en el origen $1,082 \pm 0,073$, para calcular el coeficiente de rozamiento, puesto que según la ecuación (7), la ordenada en el origen es igual a $\mu \cdot g$. Sustituyendo valores se obtiene:

$$\mu \cdot g = \mu \cdot 9,477 = 1,082 \Rightarrow \mu = \frac{1,082}{9,477} \approx 0,11$$

b) *Determinación del valor del coeficiente de rozamiento empleando también la aceleración angular.*

De acuerdo con la ecuación (8), representamos la aceleración del C.M. dividida por la aceleración angular, frente a la tangente del ángulo del plano, figura 6.

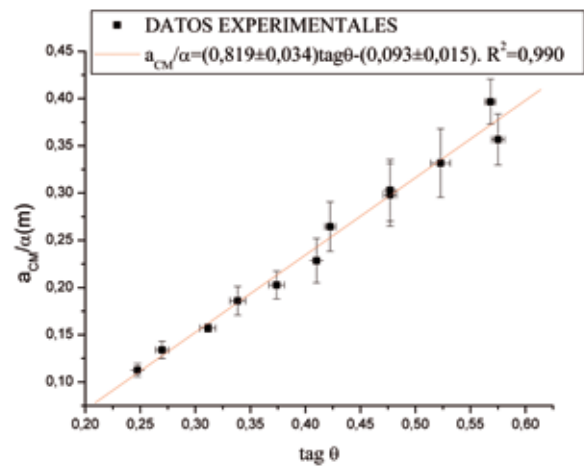


Figura 6. Aceleración del C.M. dividida por la aceleración angular, frente a la tangente del ángulo del plano.

Para calcular el coeficiente de rozamiento μ tomamos en la recta, los valores de la ordenada en el origen y de la pendiente, para igualarlos con los coeficientes correspondientes de la ecuación [8]

$$\frac{I}{mR_e} = 0,093; \quad \frac{I}{mR_e} \frac{I}{\mu} = 0,819$$

$$\mu = \frac{I}{mR_e} \frac{I}{0,819} = \frac{0,093}{0,819} = 0,11$$

Aparece de nuevo el valor $\mu \approx 0,11$, aún habiendo empleado magnitudes distintas.

Comparación de los resultados experimentales con los del modelo teórico

Rodadura

Si en las ecuaciones teóricas (5) y (6) se introducen los datos del aro medidos directamente, se obtienen para la

aceleración del centro de masas y la angular, las siguientes ecuaciones en unidades S.I.:

$$a_{CM} = 4,9 \operatorname{sen} \theta \quad \alpha = 53 \operatorname{sen} \theta$$

En figura 7 se representa, con los valores experimentales, la aceleración del centro de masas, frente al seno del ángulo y su ecuación de ajuste. Se encuentra una pendiente de 4,7 frente a 4,9 del valor teórico, lo que representa una diferencia de un 5 %.

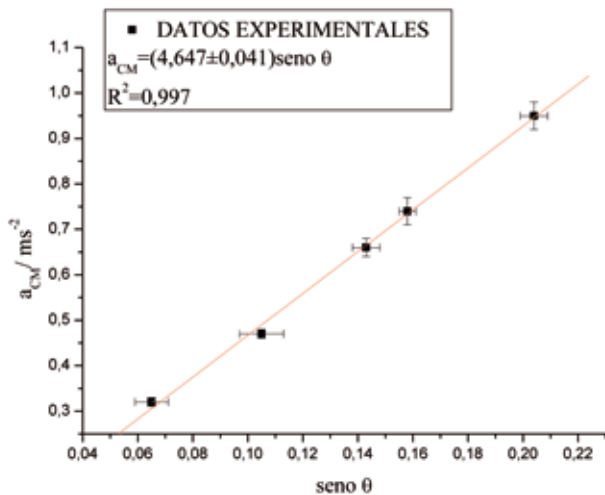


Figura 7. Aceleración del C. M. frente al seno del ángulo del plano.

En la figura 8 se representan los valores experimentales de la aceleración angular, frente al seno del ángulo del plano y su ecuación de ajuste.

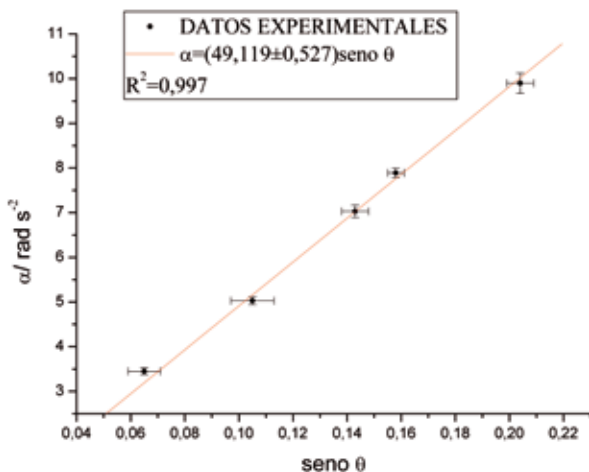


Figura 8. Aceleración angular, frente al seno del ángulo del plano..

Se observa una pendiente de 49 frente a 53 del valor teórico, lo que representa una diferencia de un 7 %.

Cuando se produce la rodadura, las ecuaciones del modelo teórico dan valores bastante aproximados a los experimentales para la aceleración del centro de masas, sin embargo, la diferencia es más notable cuando se hace la comparación

con la aceleración angular. Posiblemente sea debido a la gran dificultad que presenta la medida experimental de esta magnitud.

Rotación con deslizamiento

La combinación de las ecuaciones (1) y (4) conduce a la ecuación $a_{CM} = g (\operatorname{sen} \theta - \mu \operatorname{cos} \theta)$. Teniendo en cuenta los datos experimentales encontrados para el coeficiente de rozamiento podemos observar en la gráfica de la figura 9, cómo se ajustan los valores experimentales y los teóricos, dando distintos números al coeficiente de rozamiento μ .

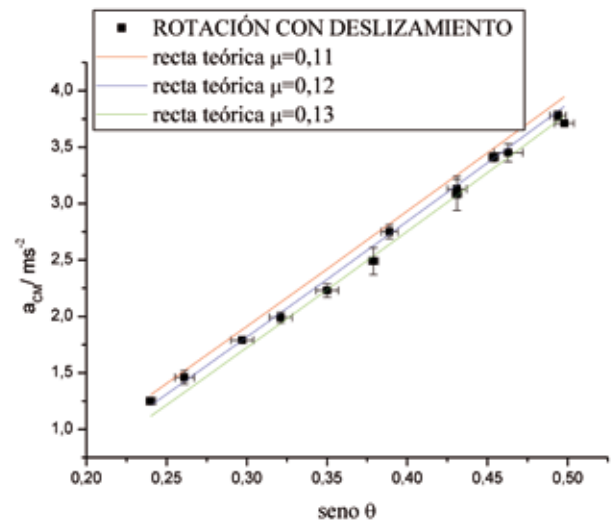


Figura 9. Aceleración del C. M. frente al seno del ángulo del plano, para distintos valores del coeficiente de rozamiento μ .

El valor del coeficiente de rozamiento que parece ajustarse mejor a los datos experimentales es $\mu = 0,12$.

Resultados y conclusiones

- 1) Midiendo las aceleraciones angular y del centro de masa independientemente, se ha comprobado que antes de alcanzarse el ángulo crítico θ_c , el movimiento es de rodadura, pues la gráfica de a_{CM} frente a la aceleración angular α es una línea recta, que tiene como pendiente un valor muy aproximado al radio exterior del cilindro medido directamente con un calibrador. En esta región se cumple dentro de un error experimental inferior al 2% ; la ecuación $a_{CM} = \alpha \cdot R$ característica de la rodadura.
- 2) El estudio experimental permite verificar con datos numéricos, que hay un cambio bien definido de la rodadura a la rotación con deslizamiento, produciéndose a partir de un cierto valor del ángulo del plano.
- 3) Este cambio puntual permite deducir un valor aproximado del coeficiente de rozamiento que se acerca bastante bien, al obtenido a partir del análisis de datos de la rotación con deslizamiento, empleando distintas magnitudes.
- 4) En el experimento también se mide la aceleración de la gravedad con una desviación inferior al 4%.

Referencias Bibliográficas

- [1] FEYNMAN/LEIGHTON/SANDS. *The Feynman Lectures on Physics*, Volumen I, capítulo 12. Fondo Educativo Interamericano, S.A. (1971).
- [2] SHAW, D.E. Y WUNDERLICH, F.J. *Study of the slipping of a rolling sphere*. Am.J.Phys. 52 (11), November (1984)
- [3] PASCUAL VARÓ, P. Y GIMENEZ TORRES, J. *Estudio de la rodadura*. <http://www.curiedigital.net/curiedigital/1997/>
- [4] BARBERO GARCÍA, A.J. Y GARCÍA CIFUENTES, A. *Rodadura y deslizamiento sobre un plano inclinado*. Revista Española de Física Vol.13 (1), (1999)
- [5] LÓPEZ RODRÍGUEZ, R. Y GÁLVEZ MARTÍNEZ, F.J. *Medida de la longitud de rodadura*. Revista Española de Física Vol. 21, (1), (2007)
- [6] HERNÁNDEZ PÉREZ, JOSÉ LUIS / SOLÁ DE LOS SANTOS, JAIME/ FERNÁNDEZ CRUZ, RICARDO. *Caída libre, Realidad y modelos*. Revista Española de Física Vol. 20 (1), (2006)

Jaime Solá de los Santos

Profesor en el I.E.S. Lope de Vega de Madrid

Ricardo Fernández Cruz

Profesor en el I.E.S. Cervantes de Madrid

José Luis Hernández Pérez

Profesor en el I.E.S. La Estrella de Madrid

IV JORNADAS DE LA ENSEÑANZA DE LA FÍSICA Y LA QUÍMICA



Investigación didáctica e innovación en el aula

28 y 29 de noviembre de 2008
ALCOBENDAS (Madrid)



COSMOCAIXA
MADRID



Obra Social
Fundación "la Caixa"

ORGANIZA

Consejo General de Colegios Oficiales de Doctores y Licenciados en Filosofía y Letras y en Ciencias
CosmoCaixa Madrid, el Museo de la Ciencia de la Obra Social de "la Caixa"
Fundación Española de Ciencia y Tecnología (FECYT)
Colegio Oficial de Físicos de España
Real Sociedad Española de Física

COLABORADORES

Instituto Superior de Formación y Recursos en Red para el Profesorado del MEPSyD
Real Sociedad Española de Química
Asociación Nacional de Químicos de España (ANQUE)
Alambique (Editorial Graó)
Cuadernos de Pedagogía
El periódico profesional *Escuela*

LUGAR DE REALIZACIÓN

CosmoCaixa Madrid
c/ Pintor Velázquez, s/n 28100 - Alcobendas (Madrid)

INFORMACIÓN E INSCRIPCIÓN

Consejo General de Colegios Oficiales de Doctores y Licenciados en Filosofía y Letras y en Ciencias
Bolsa, 11 - 28012 MADRID
Tel. 628 787 875 (de 9 a 21 h) · Tel. y Fax 91 522 45 97
www.consejogeneralcdl.es · jornadas@consejogeneralcdl.es

NORMAS PARA LA INSCRIPCIÓN

Por Internet: <http://www.consejogeneralcdl.es> (mediante tarjeta VISA)
Por transferencia bancaria a la cuenta 3025-0006-22-1400000623 del Consejo, remitiendo por fax o correo electrónico el comprobante de la transferencia y la ficha de inscripción.

Derechos de inscripción: 30 euros
Plazas limitadas

Periodo de inscripción: del 20 de octubre al 21 de noviembre de 2008

Las actividades de formación irán dirigidas al profesorado y personal especializado con destino en centros públicos y privados en los que se impartan enseñanzas de régimen general y de régimen especial.

Total: 1,5 créditos